HÖGSKOLAN KRISTIANSTAD

EXAMENSARBETE

Våren 2010

Lärarutbildningen

Krutetskiis matematiska förmågor och elevers betyg

– Går de hand i hand?

Författare

Johan Eng

Madeleine Granberg

Handledare

Thomas Dahl

www.hkr.se

Krutetskiis matematiska förmågor och elevers betyg

– Går de hand i hand?

Abstract

Vårt syfte med uppsatsen är att se vilka av Krutetskiis matematiska förmågor som kommer till uttryck under problemlösning och om det är de högpresterande eleverna som visar på flest förmågor. Uppsatsens fallstudie genomfördes i slutet av vårterminen på två skolor i mindre orter i södra Sverige. Undersökningsgruppen bestod av 14 elever i skolår åtta som delades in i fyra grupper. Gruppsammansättningen varierade, i en grupp var majoriteten högpresterande och i en annan var majoriteten lågpresterande. De fyra grupperna visade alla prov på förmågan att samla matematisk information. I två grupper visade eleverna dessutom förmågan att tänka flexibelt och förmågan att generalisera. Den fjärde gruppen innehöll en elev som ensam visade de fem förmågor vi hoppades skulle komma fram, förmågan att memorera matematiskt material är det svårt för oss att avgöra om de har då vi inte vet vad de har sysslat med tidigare. Vi förväntade oss inte heller att förmågan att tänka baklänges skulle visas. Av de 14 elever som ingick i undersökningen fanns där en elev som visade mer matematisk begåvning än vad elevens betyg indikerade. Avslutningsvis kan vi i vår undersökning inte se något samband mellan elevers betyg och antalet förmågor de visar upp vid problemlösning.

Ämnesord:
betyg, elever, förmåga, Krutetskii, matematik, problemlösning, skolprestationer

Innehåll

1. Inledning

Elever från blandade skolår fick följande problem att lösa:
”Det finns 26 får och 10 getter på ett skepp. Hur gammal är kaptenen?”
Problemet ställer en av Krutetskiis (1976) förmågor på sin spets, nämligen förmågan att samla matematisk information. En undersökning visar att tio procent av eleverna i belgiska förskoleklasser och skolår ett löste problemet genom att addera antalet får och getter för att få kaptenens ålder. Andelen elever som löste problemet på detta vis ökade sedan ju högre upp i klasserna de gick. Forskning visar också att när elever ombeds lösa ett problem med flera olika sorters strategier så förekommer det att elever löser problemet på olika numeriska vis och upptäcker inte att de får fram olika svar på samma problem (Cai, 2003).

I en rapport från Skolverket (2003) framkommer det att undervisningen är enformig och består av en gemensam genomgång vid lektionens början och sedan enskilt räknande, där läraren går runt och ger hjälp. Eleverna får en metod visad för sig och tränar sedan på den genom att räkna i boken vilket vi kommer att kalla mekaniskt räknande. Läraren hinner i genomsnitt tala med en elev i högst två minuter per lektion och resten av tiden får eleverna själva lära matematik genom att arbeta med bokens uppgifter (Skolverket, 2003). Har man då svårt för matematiken kan det inte vara lätt att under större delen av lektionstiden upprätthålla lusten att lära. Den begränsade tiden gör också att läraren inte hinner diskutera grundläggande principer och hjälpa eleverna att själv reflektera över dem och då tvingas eleven att kopiera lärobokens eller lärarens sätt att lösa uppgiften. Förståelse för begrepp blir inte det viktiga för eleven, utan lektionen går ut på att hinna så långt som möjligt i boken (Skolverket, 2003). Denna typ av undervisning kommer vi hädanefter att hänvisa till som traditionell undervisning. Att komma långt i boken och lösa uppgifter efter en färdig mall främjar inte kreativt tänkande. Det kan dessutom göra att eleven blir ställd när de kommer till en situation som kräver en matematisk lösning utan att någon eller något har talat om vilken metod som ska användas. Eleverna ska kunna lösa matematiska problem både i skolan och i verkliga livet och därför måste de primära målen med matematiklärande vara förståelse och problemlösning. Dessa två mål är naturligt relaterade till varandra eftersom förståelse för hur matematiken kan användas i praktiken uppnås bäst med undervisning genom problemlösning (Lester & Lambdin, 2007).

1.1 Syfte och frågeställningar

Vårt syfte med uppsatsen är att se vilka matematiska förmågor som kommer till uttryck under problemlösning. Med problemlösning menar vi arbete med matematiska problem som utmanar eleverna då det saknas en given lösningsmetod. Forskning har visat att matematiska förmågor inte är något medfött utan något som kan tränas upp om de stimuleras genom en matematisk aktivitet (Krutetskii, 1976). Det är inte alltid det är skolans mest högpresterande elever som har störst förmåga utan många av eleverna är understimulerade och tycker skolan är så trist att de presterar under sin kapacitet (Wistedt, 2004). Problemlösning kan då vara ett sätt att öka lusten att lära och intresset för matematik (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005). Vidare säger Mouwitz (2007) att mer fokus på kreativt arbete kan vara det som krävs för att en elev ska finna en känsla av att lyckas i matematiken och kanske också hitta ett intresse.

I uppsatsen kommer vi att observera elever i skolår åtta när de löser ett rikt matematiskt problem (se 3.2 för definition) och besvara frågorna:

- Vilka av Krutetskiis förmågor visar eleverna vid problemlösningen?
- Är det de högpresterande eleverna som visar på flest matematiska förmågor?

Med högpresterande elever menar vi elever med minst VG i betyg.

1.2 Utbildningsvetenskaplig relevans

Kursplanen i grundskolans matematik (Skolverket, 2000) slår fast att ”*det krävs en balans mellan kreativa, problemlösande aktiviteter och kunskaper om matematikens begrepp, metoder och uttrycksformer för att bli framgångsrik i matematik.*”
Vidare säger kursplanen att (…) utbildningen ska ge eleverna chans att utöva matematik i meningsfulla och relevanta situationer och ge eleverna möjligheten att uppleva den tillfredställelse och glädje som uppkommer när de förstår och lyckas lösa problem, att skolan ska sträva mot att utveckla elevers förmåga att föra logiska resonemang, dra slutsatser och generalisera samt sträva efter att utveckla deras förmåga att formulera, gestalta och lösa problem med hjälp av matematik.

Det ska också strävas efter att eleverna ska ”*kunna jämföra och värdera lösningarna i förhållande till den ursprungliga problemsituationen, och att de muntligt och skriftligt kan* *förklara och argumentera för sitt tänkande samt kritiskt granska modellers förutsättningar begränsningar och användningar"* (Skolverket, 2000).

Med andra ord ska matematikundervisningen i stor del bygga på problemlösande aktiviteter och sträva efter att få eleverna att kunna kritiskt granska varandras lösningar och argumentera för sin ståndpunkt. *"Eleverna måste lösa många problem för att förbättra sin problemlösningsförmåga*" (Lester, 1996, s. 87). Detta bör då vara ett ständigt återkommande moment i undervisningen om Skolverkets strävansmål ska uppfyllas.

I en rapport från Skolverket (2003) framkom det att undervisningen var alltför ensidig och att det dominerande inslaget var att lösa uppgifter i läroböcker. Taflin (2007) har liknande erfarenheter, *"Min erfarenhet av undervisning och arbete som lärarutbildare är att den problemlösning som förekommer i skolan sker som ett moment vid sidan av ordinarie undervisning. Problemlösningen är då till för de elever som är snabbräknande eller som ett stimulerande inslag för att göra undervisningen roligare."* (s. 22). Hon listar vad olika forskare har sett för orsaker till att problemlösning inte är en obligatorisk del av matematikundervisning:

- *"läraren vet inte vad elever kan lära sig för matematik genom att lösa problem"*
- *"lärarens egen erfarenhet och uppfattning av problemlösning kan göra det svårt för honom/henne att motivera problemlösning"*
- *"det kan även vara svårt att planera undervisning med problemlösning och veta hur man ska organisera så att klassrummet blir en miljö för lärande och samtal"*
- *"svårigheten att välja problem som leder till en lärande process"*

(Taflin, 2007, s. 22)

Vi tror att det finns en osäkerhet hos lärare när det gäller problemlösning som undervisningsmetod och att detta kan hindra lärarna från att arbeta mer med problemlösning.

2. Forskningsbakgrund

Nedan presenteras uppsatsens utbildningsvetenskapliga utgångspunkter, vad forskningen säger om undervisning genom problemlösning och Krutetskiis forskning kring matematiska förmågor.

2.1 Utbildningsvetenskapliga utgångspunkter

Då vår uppsats syftar till att analysera hur elever löser problem och vilka förmågor som visar sig i en sådan klassrumsmiljö, ligger det i vårt intresse att titta på hur elever konstruerar sin förståelse för begrepp och vår uppsats baseras därför på en socialkonstruktivistisk tanke. Socialkonstruktivismen kan ses som en blandning av konstruktivism och det sociokulturella perspektivet. Den fick en ökad betydelse under 1990-talet och upphäver den skarpa gräns som tidigare dragits mellan det kognitiva och det sociala (Engström, 1997).

Många teoribildare inom området problemlösning i matematik har en konstruktivistisk kunskapssyn. Konstruktivister säger att kunskap är något som en människa konstruerar utifrån sina erfarenheter. De ser på kunskap som ett mentalt redskap för att förstå verkligheten. Ny information kan leda till motsättningar inom individen om den motsäger den verklighet hon konstruerat. Dessa motsägelser bearbetas genom vad Piaget kallar adaption (Stensmo, 2007). Denna process har två delmoment, assimilation, där den nya informationen infogas i befintliga tankemönster och ackommodation, där tankemönstret förändras för att passa den nya informationen. Kunskapen blir aldrig färdig utan adaption sker hela tiden (Stensmo, 2007). Cobb och Yackel (1996) visar i sin artikel att den psykologiska konstruktivismen inte räcker till för att förklara hur kunskaper i matematik blir till utan analysen måste även ta hänsyn till den sociala omgivningen där eleven verkar och deltar. Socialkonstruktivismen innebär att människor i dialog konstruerar gemensamma uppfattningar. En socialkonstruktivist utgår från att de sociala och kulturella omständigheter som omger människan präglar hennes handlande, tänkande och kunnande. Den påminner om Vygotskijs teorier i det sociokulturella perspektivet men istället för att titta på klassrummet som en del i en större kulturell kontext baserar socialkonstruktivismen sina analyser på den kulturella miljö och de lokala normer som finns i just det klassrum som analysen sker i (Cobb & Yackel, 1996). Lärarens uppfattning om matematik kommer att forma dennes förhållningssätt till undervisningen och skapa en matematisk kultur som etableras i klassrummet (Engström, 1997). Engström (1997) säger att matematik är en social konstruktion av personlig karaktär, där individen skapar sin egen mening. För att elever ska kunna utveckla en kunskap som kan förstås och accepteras också av andra, behöver de samtala med klasskamrater och lärare. Genom dialogen etableras en förhandlad verklighet och den är nödvändig för att eleven själv ska kunna omstrukturera och därmed utveckla sitt matematiska kunnande. Taflin (2007) bygger på Engströms resonemang och menar att vid elevers byggande av kunskaper spelar studiekamrater en stor roll. När elever med liknande erfarenheter och kunskaper tillsammans diskuterar ett problems lösning eller betydelsen av ett matematiskt begrepp ges alla deltagande elever möjligheter att bygga på och fördjupa sina tidigare kunskaper. Det ligger närmare till hands för eleverna att värdera och kritisera kamraternas påstående än lärarens eftersom denne ses som en auktoritet dessutom har eleverna ett gemensamt språk med sina kamrater och de är nära varandras lärande vilket också underlättar kommunikationen.

Diverse forskare nämner vikten av att skapa en klassrumsmiljö som främjar problemlösning och öppnar för diskussioner mellan elev – lärare och elev – elev där olika lösningsförslag kan jämföras och granskas. Till exempel säger Lester och Lambdin (2007) att lärarens uppgifter borde vara att skapa en klassrumsmiljö med normer som uppmuntrar eleverna att lära genom problemlösning. Läraren måste betona att eleverna noggrant ska fundera över sina och kamraternas lösningsmetoder och över vilken matematik de lär sig under arbetet. Läraren ska även tillhandahålla tillräckligt med stöd för elevernas matematiska aktiviteter, men inte så mycket stöd att läraren själv utför tankeprocessen åt eleverna. En annan viktig faktor är hur mycket tid som ges till att lösa problemet och diskutera lösningsförslagen. Diskussion av ett problems olika lösningar tar ofta längre tid än vad en traditionell lektion skulle ta (Lester & Lambdin, 2007). Vidare beskriver Maher (1998) en konstruktivistisk syn på undervisning och menar att det viktigaste är att se till att eleverna utvecklar idéer och att uppmuntra dem till att kommunicera med sin omgivning om dessa. Hon säger att klassrumskommunikation kan vara ett effektivt instrument att väcka elevers intresse för att arbeta med matematik. Lärarens uppgift blir då att ta reda på vad som underlättar konversationen och att ordna verksamheten så att den blir möjlig (Maher, 1998). Lärarens attityd är också viktig, Taflin (2007) har visat att eleverna lär sig mer om läraren har en positiv inställning till problemlösning som undervisningsmetod och enligt Lester (1996) måste elever tro på att deras lärare tycker att problemlösning är betydelsefullt för att de ska ta till sig undervisningen.

2.2 Problemlösning som undervisningsmetod

Undervisning i matematik genom problemlösning är en relativt ny företeelse som det inte har forskats så mycket om, men det råder en stor enighet om att en sådan undervisning utvecklar elevers lärande (Lester & Lambdin, 2007). Uppfattningen grundar sig på att det har forskats kring det som associeras med undervisningssättet, till exempel förändring av lärarrollen, att skapa och välja ut problem, lära genom samarbete och problematisering av läroplanen (Cai, 2003). Med undervisning genom problemlösning syftar vi på en undervisning som utgår ifrån väl valda problem som kräver ny kunskap och på så vis introduceras ett visst matematiskt område och nya matematiska idéer.

I läroplanen för det obligatoriska skolväsendet (Lpo94) står det att skolan skall sträva efter att varje elev utvecklar nyfikenhet och lust att lära (Skolverket, 2006). Detta kan uppnås genom problemlösning samtidigt som förmågan att tänka kreativt, systematiskt och strukturerat utvecklas. Problemlösning skapar dessutom ett forum där man kan träna sina färdigheter och sitt symbolspråk, samt bygga upp sin begreppsförståelse (Hagland, Hedrén, Taflin, 2005). Det finns skeptiker till undervisning genom problemlösning, både bland föräldrar och bland lärare, de är oroliga att ett större fokus på problemlösning gör att eleverna går miste om utvecklandet av basfärdigheter i matematik (Cai, 2003). Den forskning som Cai (2003) återger visar att alla studier som gjorts på elever i syfte att jämföra klasser som fått undervisning genom problemlösning med klasser som fått en mer traditionell undervisning visar att elever som fått undervisning genom problemlösning klarar sig bättre på förståelsefrågor och minst lika bra på standardfrågor jämfört med elever med traditionell undervisning i bagaget. Taflin (2007) visar i sin undersökning att tillfällen till matematiklärande finns under hela problemlösningsprocessen om läraren presenterar problemet på ett genomtänkt sätt och håller en gemensam genomgång i slutet av lektionen. Tillfällen till matematiklärande definierar hon som ”ett tidsintervall då en viss specifik matematisk idé behandlas av lärare eller elever” (s. 175).

2.2.1 Konsekvenser av en traditionell undervisning

I en rapport från Skolverket (2003) framkom det att matematikundervisningen i skolår 7-9 är enformig. Den innehåller få inslag av variation både när det gäller innehåll och arbetssätt. En lektion började med att läraren hade en genomgång, sedan fick eleverna räkna i läroboken och läraren gick runt i klassrummet och hjälpte eleverna individuellt. Samarbete mellan elever och diskussioner kring matematiska problem och olika lösningsstrategier var sällsynt. Det viktigaste för eleverna var att hinna långt i boken och komma först, inte att förstå och utveckla begrepp. Många elever var uttråkade antingen för att uppgifterna var för svåra eller för att de var för lätta. Elever som har lätt för matematik uttryckte att de saknar utmaningar och menar att allt är repetition, *”samma sak i sjuan, åttan och nian”,* säger de. (Skolverket, 2003, s. 20) Aktiviteten på de observerade lektionerna låg på 50-100 procent. De flesta arbetade hela tiden men verkade uttråkade och omotiverade. Flera av de uttråkade arbetade betydligt mindre och hann inte mer än en tiondel av uppgifterna. När eleverna blev tillfrågade om vad matematiken som behandlades på lektionen handlade om kunde de inte svara.

Skolverkets rapport ger en liknande bild som den Lester och Lambdin (2007) beskriver när de förklarar hur undervisningstraditionerna ser ut i USA. I USA kommer uppgifterna eleverna arbetar med i huvudsak från läroböcker, de är korta, saknar kontext och är symboltyngda. Syftet med uppgifterna är att eleverna ska behärska och behålla sina procedurfärdigheter. Lärarens roll är att visa typexempel för eleverna. Eleverna ska lära sig att tillämpa de demonstrerade metoder och övar dessa genom individuellt räknade av många uppgifter som liknar det läraren löst på tavlan. I den traditionella sociokulturella miljön i klassrummet finns en överenskommelse om att lärare och facit är de enda matematiska auktoriteterna. I denna miljö är deras tänkande och strategier mindre intressanta än det korrekta svaret på problemet och den av läroboken föreslagna metoden. Lester och Lambdin (2007) menar att *konsekvensen av en sådan här undervisning blir att eleverna i bästa fall lämnar skolan med en uppsättning fakta, procedurer och formler som förstås på ett ytligt och osammanhängande sätt vilket medför att de inte kommer att veta hur det de lärt sig kan användas utanför skolan* (s.97).

Konsekvenser av en traditionell undervisning visas även i annan forskning. Cai (2003) har samlat vad internationell forskning kommit fram till i en artikel. Det har visat sig att elever ofta tror att det bara finns en rätt väg att angripa ett problem på. Eleverna ser inte på matematik som en kreativ och intellektuell aktivitet utan som en samling regler och procedurer som ska memoreras för att kunna följa den enda korrekta vägen och komma fram till det enda korrekta svaret. En femtedel av tillfrågade elever i USA anser att ett matematiskt problem endast kan lösas på ett sätt (Lindquist, 1989 genom Cai, 2003). Elever har också bestämda tankar om vad som förväntas av dem när de får ett problem att lösa. Det har gjorts undersökningar där eleverna fick följande problem att lösa: *”Det finns 26 får och 10 getter på ett skepp. Hur gammal är kaptenen?”* Tio procent av eleverna i belgiska förskoleklasser och skolår ett löste problemet genom att addera antalet får och getter för att få kaptenens ålder.

Andelen elever som löste problemet på detta vis ökade ju högre upp i klasserna de gick, i skolår tre och fyra var andelen lösningar upp i 60 procent. Ett liknande problem gavs kinesiska elever i skolår fyra, sju, åtta och tolv. 90 procent av eleverna i skolår fyra, 82 procent i skolår sju och åtta, 34 procent i skolår 12 löste problemet genom addition utan att inse problemets absurda natur. När de kinesiska eleverna frågades varför de inte såg att problemet var meningslöst svarade eleverna att problem som läraren ger alltid har en lösning. En annan tendens som syns i forskningen är att när elever ombeds lösa ett problem med flera olika sorters strategier så löser en del av dem problemet på olika numeriska vis och upptäcker inte om att de får fram olika svar på samma problem.

2.2.2 Internationell matematikundervisning

Forskning har under senare år baserats på lektionsstudier där man beskriver vad elever och lärare arbetar med under en vanlig lektion. Man har försökt ta reda på om det finns något gemensamt i hur matematiklärarna runt om i världen lägger upp sina lektioner och kommit fram till att lektionens faser i stor grad är kulturellt styrd. Lektionerna såg helt olika ut i Tyskland, USA och Japan. Japanska elever har ofta stora framgångar vid jämförande internationella test och därför har forskarna intresserat sig speciellt för hur deras lektioner ser ut. Medan Tyskland och USA bedriver en traditionell typ av undervisning så ser lektionerna i Japan annorlunda ut. Där börjar lektionen med en kort tillbakablick till lektionen innan. Sedan får eleverna enskilt lösa anknytande utmanande uppgifter, problem. Därefter diskuterar eleverna sina lösningar i par och sedan väljs några lösningar ut som presenteras på tavlan och diskuteras i helklass. Lektionen avslutas med att läraren summerar lektionens matematiska innehåll och ger ett anknytande problem som eleverna ska försöka lösa (Taflin, 2007) .

2.3 Krutetskiis matematiska förmågor

Under 1950- och 60-talet utförde Krutetskii en omfattande undersökning på skolbarns matematiska förmågor. Den experimentella delen av forskningen pågick under 12 år inkluderade ungefär 200 elever. Krutetskii (1976) hävdade att matematiska förmågor inte är något förutbestämt, medfött, utan att de formas och utvecklas genom instruktioner, övningar och bemästrande av en aktivitet och att det inte går att förutse hur långt eleverna kan utvecklas.

Han konstaterade bland annat följande om matematiska förmågor:

- Förmågor är alltid ett resultat av utveckling. De formas och utvecklas kontinuerligt vid aktivitet, instruktion och träning.
- Förmågor kan inte vara medfödda. Bara en fallenhet för den givna förmågan kan finnas vid födseln.
- Förmågor är alltid kopplade till en specifik aktivitet och kan bara visa sig i dessa. Med andra ord så kan bara matematiska förmågor visa sig i en matematisk aktivitet.
- Svaghet i en förmåga kan kompenseras av styrka i en annan.
- Förmågor är inte det enda utan bara ett av flera villkor för att nå framgång i en aktivitet.

Då det var matematiska förmågor man ville undersöka gjordes detta utifrån dessa punkter i ett matematiskt samband. Krutetskii skapade ett flertal speciella experimentella matematiska problem konstruerade för att lyfta fram olika matematiska förmågor. Problemen var jämnt fördelade över skolmatematikens tre områden; aritmetik, algebra och geometri. Dessa var av varierad svårighetsgrad och inkluderade icke-standard problem som krävde element av kreativitet.

Dessa problem utfördes av eleverna i testgruppen i flera olika omgångar där man både iakttog processen men också samtalade med eleverna. Testgruppens lösningar analyserades sedan och flera olika jämförelser gjordes med avseende på bland annat ålder, kön, matematisk skicklighet med flera. Utöver detta gjorde också en omfattande icke-experimentell undersökning bestående av bland annat intervjuer och enkätundersökningar med framför allt lärare och matematiker där det undersöktes vad de tillfrågade ansåg vara en matematisk förmåga och hur de bedömde om eleverna hade den eller inte.

Krutetskii tar upp sju olika matematiska förmågor, indelade i tre olika grupper som han ansåg var de olika steg man löste ett problem i; Informationsinsamling, informationsbehandling och informationsbevaring.

Nedan följer Krutetskiis (1976) förmågor samt vår tolkning av dessa:

- **Förmågan att erhålla matematisk information**
  Detta är förmågan att samla matematisk information. Det vill säga förmågan att dels förstå ett problem men också att kunna urskilja för problemet relevant, överflödig samt saknad data. ”*It is well known that in a number of cases the basic difficulties in mastering an intellectual skill or habit lie in the realm of perceiving the initial facts and not in the realm of the operations that should follow this perception*” (s. 227).

- **Förmågan att generalisera matematiska objekt, relationer, och operationer**
  Denna förmåga visar sig på olika sätt. Dels så handlar det om att kunna förstå och tillämpa en generell lösning men också att se när en sådan kan användas. Det är också förmågan att utifrån ett givet matematiskt problem själv konstruera en generell lösning. Ett exempel kan vara att inse att man med hjälp av kvadreringsregeln ($(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$) kan lösa följande multiplikation: (C+D+E)(E+C+D) och sedan skapa en generell lösning för denna typ av problem.

- **Förmågan att förkorta ett matematiskt resonemang samt de korresponderande matematiska operationerna**
  Detta är förmågan att förkorta den mentala process som krävs för att utföra olika moment. Man kan säga att individer med denna förmåga ”hoppar över” steg i tankeprocessen men kan också om så krävs gå tillbaka och föra ett fullt resonemang. Anledningen till att Krutetskii anser sig kunna peka på att det faktiskt handlar om en förkortad mental process är snabbheten med vilken svaren ges, avsaknaden av pauser där länkar i resonemanget försvunnit samt svårigheten många har att snabbt på begäran återge en detaljerad struktur över resonemanget.

- **Flexibilitet i den mentala processen**
  Detta definieras som förmågan att kunna lösa problem på flera olika sätt. Detta kräver att man kan släppa gamla tankmönster och söka efter andra lösningar ofärgade av de föregående. ”*It is expressed in a free and easy switching from one mental operation to another qualitatively different one.*” (s. 282)

- **En strävan efter klarhet, enkelhet och rationalitet (”elegans”) i en lösning**
  Denna förmåga yttrar sig som en strävan efter att hitta den mest rationella lösning på ett problem; ett sökande efter den tydligaste, enklaste och kortaste lösningen. Individer med denna förmåga är oftast inte nöjda förrän de hittat en lösning de anser bra nog.

- **Förmågan att snabbt och lätt se samband i båda riktningar så till vida att de kan skifta från ett tankesätt till det rakt motsatta.**
  Detta är förmågan att kunna vända en mental process, att kunna gå från resultatet tillbaka till de inledande parametrarna. Viktigt att notera är att vägen mellan start och mål i tankeprocessen kan vara annorlunda beroende på vilket håll processen går på. Det viktiga är att man kan gå från A till F samt från F tillbaka till A, inte hur detta går till (Krutetskii, 1976). Uppgiften att faktorisera $a^2+2ab+b^2$ är t.ex. den omvända processen att utveckla $(a+b)^2$.

- **Förmågan att minnas matematisk information**
  Detta är förmågan att komma ihåg olika matematiska lösningsstrategier, bevis och relationer. Man minns lösningsstrategierna för en specifik problemtyp och kan plocka fram dessa om man ställs inför liknande problem. Många kan till och med uppleva det som att de löst det nya problemet förr.

2.4 Undervisning för begåvade elever

Wistedt medverkar i skrivande stund i ett forskningsprojekt vid Växjö universitet som finansieras av Vetenskapsrådet utbildningsvetenskapliga kommitté. Projektet går ut på att forma en pedagogik som är anpassad för matematiskt begåvade elever. I projektpresentationen (Wistedt, 2004) beskriver hon att begåvade elever kan visa sin matematiska förmåga på olika vis. Det är inte alltid det är skolans mest högpresterande elever som har störst förmåga. Många av eleverna är understimulerade och tycker skolan är så trist att de presterar under sin kapacitet. Andra finner det besvärligt att vara annorlunda att de försöker dölja sin kompetens. Sedan finns det de som tänker långsamt, reflekterar och vänder och vrider på problem där de prövar och omprövar sina metoder. Det är förmågor som i ämnet matematik har stort värde men som inte alltid värderas i undervisningen, där det gäller att snabbt ta sig fram i läroboken. I en rapport från Skolverket (2003) framkommer det att matematikundervisningen lägger för mycket fokus på färdigheter i ämnet snarare än på kunskapsbildning. De förmågor som Krutetskii (1976) beskriver som mindre avgörande i matematik är dem som skolan ofta värderar högt; snabbhet i tanken, beräkningsförmåga och minne för symboler och tal.

1994 utfärdade Europarådet rekommendationer till medlemsländerna (Europarådet, 1994) där det slås fast att barn med särskild begåvning också är i behov av särskilt stöd. Alla barn har rättigheten att utvecklas efter sin förmåga i skolan och det är skolans skyldighet att se till att de ges denna möjlighet. Vidare varnar Europarådet för särbehandling av begåvade barn och förespråkar undervisning i vanlig klass. Förutsättningen för detta är att undervisningen utvecklas så att den också kan ge stöd åt de talangfulla eleverna. Det gäller för skolan att hitta uppgifter och aktiviteter som stimulerar till matematisk aktivitet, att utveckla en pedagogik som lyfter fram elevers talanger.

När regeringen i budgetpropositionen 2002/03 tog upp frågan om att utveckla lärarutbildningen så att lärarstuderande ges möjlighet att ta del av ny forskning om högpresterande barns behov av särskilt stöd, var kritiken bland journalister stor, *”Ska de som redan har allt nu kräva extra stöd och hjälpinsatser?”* var frågor de ställde sig (Wistedt, 2005, s. 54). Men Engström (2005) menar att det inte råder någon motsättning mellan omsorg om de ”svaga” eleverna och de talangfulla. Tvärtom, de svaga eleverna skulle må bra av att vi såg till de förmågor de faktiskt har och till hur vi kan utveckla deras matematiska förståelse med hjälp av dessa istället för att leta efter svagheter och tillkortakommanden även Krutetskii (1976) uppmanar oss att istället för att leta efter svagheter hos eleverna söka efter deras starka sidor.

3. Metod

Syftet med vår uppsats är att se vilka förmågor som kommer fram när man arbetar med problemlösning vilket medför att det i första hand är processen och inte resultatet vid problemlösningen som vi är intresserade av. Vi valde därför att göra en fallstudie. En fallstudie är ett samlingsbegrepp för en grupp forskningsmetoder som fokuserar på en studiet av en viss företeelse (Bell, 2000). Man undersöker samspelet mellan olika faktorer i en viss situation och kan på så sätt få fram avgörande information som inte skulle visa sig i en surveyundersökning (Bell, 2000). Fallstudiemetodens stora styrka ligger just i att den gör det möjligt att fokusera på speciell företeelse och på att få fram de faktorer som inverkar på denna (Bell, 2000).

3.1 Presentation av undersökningen

Undersökningen gjordes i slutet av vårterminen på två skolor i mindre orter i södra Sverige. Vår undersökningsgrupp består av elever i skolår åtta, då dessa bedömdes ha mer tid till att delta i undersökningen än vad elever i skolår nio har. Det är möjligt att nior skulle ha klarat av att lösa problemet bättre då de läst mer matematik men det bedömdes att åttor har läst så pass mycket matematik att de ska kunna angripa problemet. Två klasser på olika skolor valdes ut att få delta. Den första skolan är representerad med två grupper med tre respektive fyra elever, båda dessa grupper videofilmades. Den andra skolan är också representerad av två grupper men endast en av dem filmades. Eleverna som ingick i grupperna ställde upp frivilligt och gruppindelningen gjordes av deras lärare för att få grupper där personkemin stämde. Grupperna har en ojämn könsfördelning men vi upplever inte detta som något problem då det inte är vårt syfte att göra några jämförelser mellan könen och då det enligt Krutetskii (1976) inte finns någon skillnad vad det gäller matematisk förmåga. Varje grupp fick sitta ensamma i ett grupprum där de kunde arbeta ostört med problemet. Övriga elever i klassen fick arbeta med samma problem ensklit i lektionssalen.

3.2 Glassproblemet

Vi ville att eleverna skulle få arbeta med ett så kallat rikt problem. Vi har valt att definiera ett rikt problem på samma vis som Taflin (2007). Hon bestämmer sju kriterier som måste uppfyllas:

1. Problemet ska introducera viktiga matematiska idéer eller vissa lösningsstrategier.

2. Problemet ska vara lätt att förstå och alla ska ha en möjlighet att arbeta med det.

3. Problemet ska upplevas som en utmaning, kräva ansträngning och tillåtas ta tid.

4. Problemet ska kunna lösas på flera olika sätt, med olika strategier och representationer.

5. Problemet ska kunna initiera en matematisk diskussion utifrån elevernas skilda lösningar, en diskussion som visar på olika strategier, representationer och matematiska idéer.

6. Problemet ska kunna fungera som brobyggare.

7. Problemet ska kunna leda till att elever och lärare formulerar nya intressanta problem.

(Taflin, 2007, s. 22)

Problemet vi valde att använda vid vår videostudie är en variant på problemet Glassarna ur boken Rika Matematiska Problem. Där presenteras det enligt följande:

Glassarna

Lisa ska köpa lösglass i kulor och kan välja fyra olika smaker.

Hon vill ha två glasskulor

a) På hur många sätt kan hon välja sin glass?

b) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

(Hagland, Hedrén & Taflin, 2005, s. 219)

Problemet i sig är väldigt intressant då svårighetsgraden går att variera enkelt. I sin enklaste form går problemet att arbeta med i en förskoleklass och därifrån kan man skala upp det till att utan problem utmana gymnasieelever. Svårighetsgraden varieras enkelt genom att ändra antalet tillgängliga smaker samt hur många kulor glassen skall bestå av. Utöver detta finns det i uppgiften två ospecificerade villkor som har stor inverkan på problemet. Får man välja samma smak flera gånger samt spelar ordningen på kulorna någon roll? För att vi ska kunna jämföra våra olika elevgrupper valde vi att låsa dem till att man inte får välja samma smak flera gånger och att ordningen saknar betydelse. Dessa kriterier valdes i första hand för att förenkla matematiken i problemet. Vi valde också att utveckla problemformuleringen genom att lägga till fler deluppgifter (bilaga 1). Detta gjordes dels för att försöka uppfylla alla kriterier som ställs på ett rikt problem men också för att leda eleverna mot en mer generell lösning.

> Genom att formulera delproblem finns det en större möjlighet att alla elever får en utmaning för sitt eget arbete men också att alla har möjlighet att förstå resonemang och redovisning av problemet. Delproblemen ger också en anvisning till eleven och läraren så att de sedan ska kunna komma fram till den matematiska generaliseringen. (Taflin, 2007, s. 123)

Taflin (2007) menar att varje problem bör avslutas med att eleverna får konstruera och lösa ett liknande problem, det är då man ser om eleverna har förstått matematiken i problemet. Forskning visar att matematiklärande vid problemlösning sker bäst om eleverna får tid att diskutera och jämföra varandras lösningar och om en gemensam genomgång hålls på slutet (Taflin, 2007; Lester & Lambdin, 2007). Om dessa steg varit med i undersökningen hade det varit intressant att ha med egen problemkonstruktion som avslut, men vi tog inte med detta steg då vi enbart observerade eleverna vid ett tillfälle och inte har som syfte att se vilken förståelse eleverna har utan enbart vilka förmågor som visar sig vid problemlösning. Problemet i sin helhet finns i bilaga 1.

3.3 Analysen

Vi har valt att inte redogöra för hela filmerna utan i analysen kommer intressanta diskussioner att återges. Med intressanta diskussioner menar vi diskussioner som på något vis visar på en matematisk förmåga eller en diskussion som för arbetet med problemet framåt. Alla anteckningar som eleverna gjorde samlades in och kommer att illustrera det eleverna samtalar om. För att analysera vilka förmågor eleverna visade på när de arbetade med vårt problem tittade vi på filmerna ett flertal gånger för att tyda deras dialoger då vi tyckte att de visade på förmågorna tydligare än deras skriftliga lösningsblad. Vår undersökning består enbart av fyra grupper med sammanlagt 14 elever. Det är alltså inte möjligt att dra några stora generella slutsatser utan vi kan endast visa på tendenser.

3.4 Etiska överväganden

Vi har i vår studie följt vetenskapsrådets etikregler (Vetenskapsrådet, 2007).
Dessa formuleras i fyra stycken huvudkrav enligt följande: Informationskravet (forskaren skall informera de av forskningen berörda om den aktuella forskningsuppgiftens syfte), Samtyckeskravet (deltagare i en undersökning har rätt att själva bestämma över sin medverkan), Konfidentialitetskravet (uppgifter om alla i en undersökning ingående personer skall ges största möjliga konfidentialitet och personuppgifterna skall förvaras på ett sådant sätt att obehöriga inte kan ta del av dem) och Nyttjandekravet (uppgifter insamlade om enskilda personer får endast användas för forskningsändamål.) (Vetenskapsrådet, 2007).

Dessa har vi följt på följande sätt: Först informerades och tillfrågades lärare på de skolor där vi gjorde vår undersökning, sedan presenterades undersökningen och dess syfte för eleverna i berörda klasser. Elever intresserade av att delta fick sedan med sig ett informationsblad hem dels för att informera föräldrarna men också för att få deras medgivande (se bilaga 2). Vi tyckte det var viktigt eftersom vi skulle filma eleverna och detta kan vara känsligt. Vi kommer inte att publicera någon information som kan leda till att någon individ kan identifieras. Inget material kommer heller att användas i något annat än ett forskningssyfte.

4. Resultat och analys

Här följer våra reflektioner över hur de fyra grupperna som observerades löste problemet. Grupp 1 och 2 kommer från den ena skolan och grupp 3 och 4 från den andra skolan i vår undersökning. Eleverna deltar i vanliga fall i en traditionell typ av undervisning. De grupper som lyckades med problemet innehöll en eller två elever som var aktiva och förde arbetet framåt, samtliga grupper innehöll även elever som i stort var inaktiva under hela processen. Det är de aktiva eleverna och deras konversationer som vi kommer att titta närmare på i vår analys. Vi beskriver vilka av Krutetskiis förmågor som visar sig i de olika grupperna.

4.1 Grupp 1

Gruppen bestod av fyra elever varav tre anses vara högpresterande. De satt i ett grupprum och arbetade med problemet i 40 minuter. Gruppen visar vissa svårigheter med att förstå problemet. De diskuterade om man får använda en smak i flera olika glassar eller om den bara får förekomma i en glass och sedan inte i flera. Vi förtydligade problemformuleringen ett flertal gånger men den felaktiga tolkningen följde med genom hela processen. De gjorde inga jämförelser mellan resultaten på de olika uppgifterna och svarens rimlighet ifrågasattes sällan. De konstaterade till exempel i en deluppgift att 3 kulor och 5 smaker ger upphov till 24 kombinationer och i en annan deluppgift får de 15 kombinationer, att de fick olika resultat under samma villkor var inget de reflekterade över. De lyckades endast lösa deluppgift a och b och använde sig då av följande bild (bild 1) där de drog streck mellan de olika smakerna.

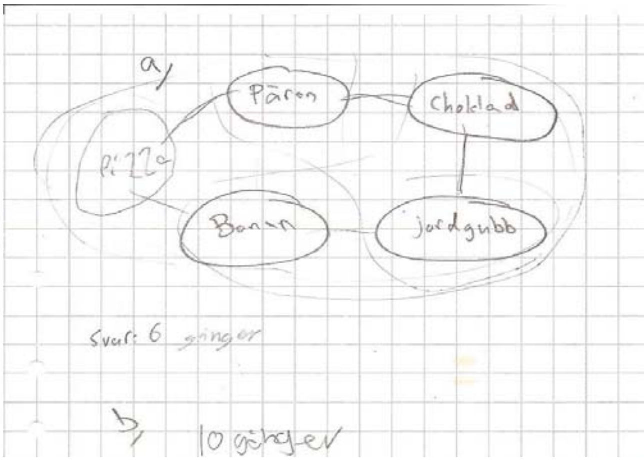

Bild 1: Bilden visar hur grupp 1 löser deluppgift a och b.

Gruppen var engagerad och ville verkligen lösa uppgiften. De lyckades lösa delar av problemet med bilder men när denna metod inte räckte till kom de inte vidare. De kunde ta ut den information som krävdes för att lösa början av uppgiften och visade därmed på en av Krutetskiis förmågor, förmågan att samla matematisk information.

4.2 Grupp 2

Gruppen bestod av tre elever varav en högpresterande och de arbetade med problemet i ett grupprum i 45 minuter. Gruppen förstod problemet direkt, de växlade mellan olika lösningsmetoder och de gjorde jämförelser mellan uppgifterna. Svarens rimlighet kontrolleras i vissa fall. 3 kulor med många smaker ställde till bekymmer men de konstaterade att det fanns likheter i lösningarna för 2 och 3 kulor. Här var det en ”svagare” elev som löste generaliseringen, vi kallar eleven för A och den ”starkare” eleven, B, förde resonemanget framåt. Uppgift a och b löstes med följande bild (Bild 2), där pilar fick illustrera kombinationerna.

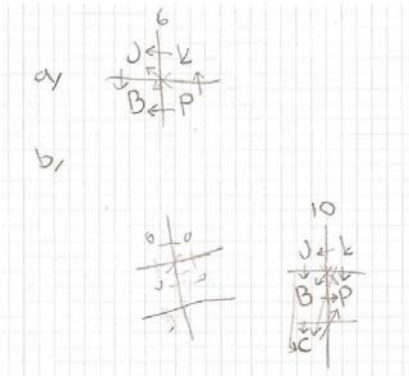

Bild 2: Bilden visar skissen gruppen ritar för att lösa deluppgift a och b.

När gruppen skulle lösa uppgift c, 3 kulor och 5 smaker, började de rita samma bild som ovan men övergav sedan den och löste uppgiften med en lista istället. De reagerade på att det blev samma antal kombinationer som i b-uppgiften och kontrollerade lösningen en extra gång.

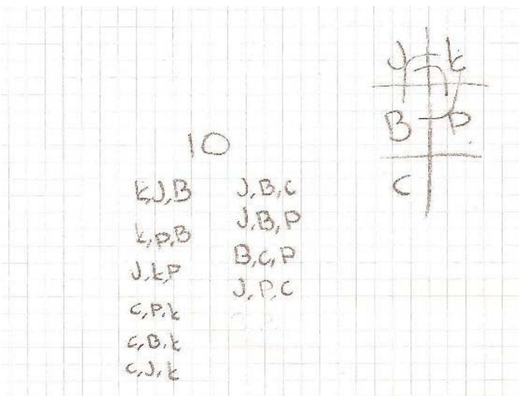

Bild 3: Här börja de lösa uppgiften med en bild men övergår sedan till en lista.

Vid deluppgift d, 2 kulor och 10 smaker, började de göra en lista men elev A såg snabbt ett mönster och listan behövde inte färdigställas. *”Han får alla sen får den en mindre (…)”*, *”9+8+7+6+5+4+3+2+1”* säger elev A. Dessa kombinerades parvis till jämna tiotal och adderades sedan ihop, (9+1)+(8+2)+(7+3)+(6+4)+5=4*10+5=45. När elev A kommit på mönstret och förklarat för övriga gruppmedlemmar, förstår elev B direkt och kan använda mönstret till en generalisering.

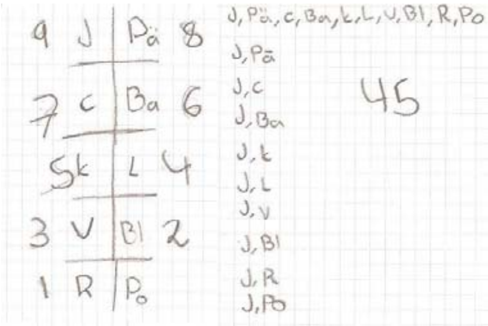

Bild 4: Visar hur de börjar listar kombinationerna för 2 kulor, sedan ser de mönstret och slutför inte listan.

När gruppen skulle lösa deluppgift d, 3 kulor och 10 smaker, började de likadant som tidigare. De försökte använda samma system som vid 2 kulor och 10 smaker men de inser inte hur komplex uppgiften är och tror sig vara färdiga när de kommit fram till 36 kombinationer.

Bild 5: Visar hur de använder samma system för att lösa uppgiften med 3 kulor.

Deluppgift e gjordes muntligt. Gruppen lyckades att med ord generalisera för två kulor.

Observatören: Om jag säger 15 smaker, vad säger ni då?

Elev B: Det blir 14+13+12 ner till noll.

Gruppen visar på tre av Krutetskiis förmågor. De visar förmågan att samla matematisk information och har förmågan att tänka flexibelt då de använder flera lösningsmetoder. De visar även på förmågan att generalisera när de muntligt kan förklara mönstret för två kulor.

4.3 Grupp 3

Gruppen bestod av tre elever där inte någon av dem är lågpresterande. De satt i ett grupprum och arbetade med problemet i 35 minuter. Den upplevdes som oengagerad och eleverna uttryckte tydligt att de inte gillar problemlösning. *”Det är roligare att räkna i boken”* uttalade sig en elev. Trots det så arbetade de på med problemet så långt de kunde, men när de stötte på större svårigheter gav de upp.

Deluppgift a, b och c löstes genom att de listade möjliga kombinationer. I deluppgift c var listan osystematisk och en kombination togs med två gånger. Bilden användes som ett visuellt stöd för att komma ihåg vilka smaker som fanns.

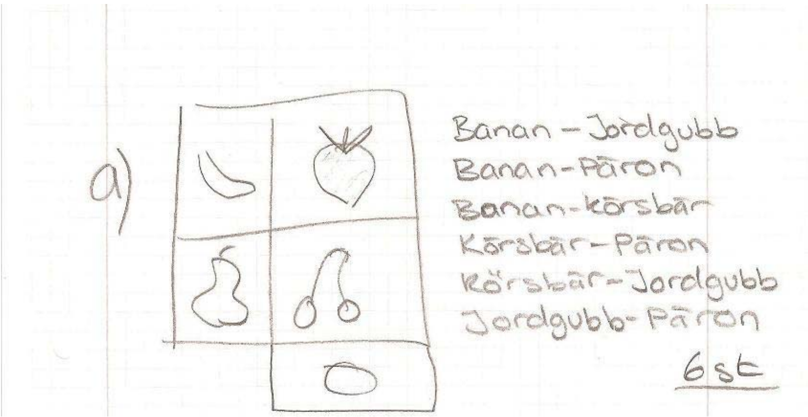

Bild 6: bilden visar hur grupp 3 löste uppgift a med både bild och lista.

Deluppgift d började de lösa genom att lista 10 olika smaker. De kombinerade sedan 2 kulor systematisk med en lista och eleven som skriver ser mönstret, *”Kan vi inte bara ta 9+8+7 ner till 1?”*. Gruppen adderade ihop kombinationerna genom att först lägga ihop dem till jämna tiotal (se bild 7).

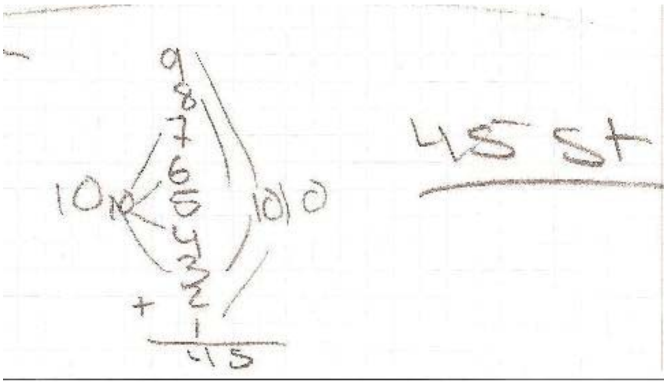

Bild 7: Bilden visar hur de räknar ihop antalet kombinationer vid premisserna 2 kulor och 10smaker.

När de ska kombinera ihop 3 kulor och 10 smaker konstaterade de att, *”Vi måste nog komma på det systemet först”*. Olika lösningsmetoder som inte ledde någonstans testades och sedan övergavs uppgiften.

Observatören förde ett muntligt resonemang för att leda fram till en generell lösning för 2 kulor. Först frågades det om 2 kulor, 500 smaker vilket provgruppen inte ville behandlade då siffran var för stor och det upplevdes ansträngande att räkna ut summan. 20 smaker, 2 kulor löste de däremot direkt och visade därmed att de förstått mönstret och kunde förklara hur man skulle lösa uppgiften oberoende av antalet smaker.

Förmågor som visar sig i gruppen är; förmågan att samla matematisk information, förmågan att generalisera vid två kulor och förmågan att tänka flexibelt (de använde sig av flera lösningsmetoder i uppgiften med 3 kulor och 10 smaker).

4.4 Grupp 4

Denna grupp observerades utan videoinspelning på grund av tekniska missöden. Gruppen bestod till en början av fyra elever. Eftersom gruppen inte videofilmades är tiden de satt ner inte helt exakt men de arbetade med problemet i cirka 20-30 minuter. Det var en högpresterande elev som vi kommer kalla för C som förde arbetet framåt och talade om för de andra vad de skulle göra. Denne elev dominerade hela lösningsprocessen och var en av två elever som stannade kvar och löste färdigt problemet, de andra två tröttnade och försvann åt olika håll. Då enbart en elev i gruppen löste problemet är det enbart dennes förmågor vi kan observera.

Gruppen löste a, b och c genom att titta på bilden på uppgiftsbladet. Det var C som gjorde allt och förklarade sin lösning för de andra i gruppen. När de skulle lösa uppgift d bad C en av gruppmedlemmarna att rita upp tio stora rutor. Dessa rutor använde C till att kombinera ihop smakerna med varandra. Ruta ett kombinerades med de övriga nio rutorna och ruta två kunde då kombineras med åtta rutor eftersom upprepning inte var tillåtet. Nu upptäckte C mönstret och fyllde i övriga rutor utan att räkna.

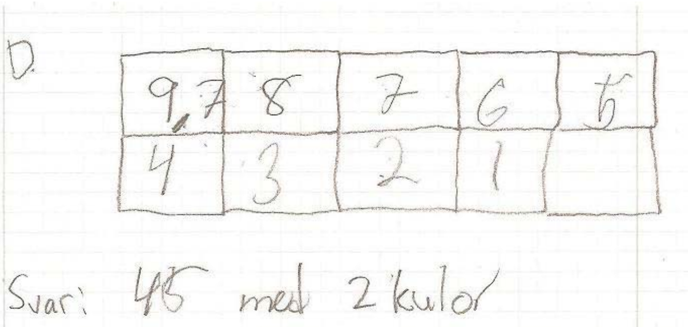

Bild 8: bilden visar hur C illustrerar 10 smaker som rutor, siffrorna visar antalet nya kombinationer som var smak kan ha.

C ritade upp en likadan bild när uppgiften med 3 kulor och 10 smaker skulle lösas. Här kombinerade C ihop de två första rutorna med övriga åtta, sedan kombinerades ruta ett och tre ihop med de resterande sju (ruta fyra till tio). Kombinationerna för ruta ett fick summan 8+7+6+5+4+3+2+1, sedan gick C vidare till ruta två och kombinerade denna med kvarvarande smaker så summan blev 7+6+5+4+3+2+1, sedan såg C mönstret och fullföljde inte figuren utan summerade kombinationerna. C fick summan 36 i ruta ett och summan 28 i ruta två, C såg mönstret och ”visste” att ruta tre skulle få summan 21.

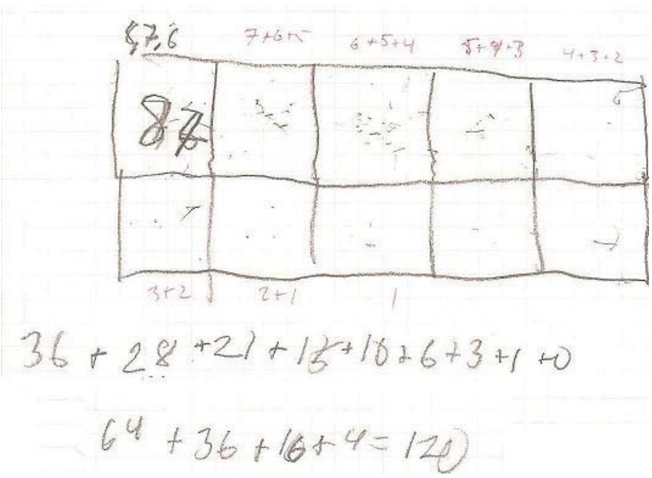

Bild 9: Bilden visar hur eleven ritar upp tio rutor och kombinerar ihop tre kulor.

Elev C visade viss förståelse för ett algebraiskt resonemang i uppgift e. För två kulor och n smaker kunde C uttrycka att summan skulle bli (n-1)+ (n-1-1) och så vidare ner (till n-n). Elev C gjorde en muntlig generalisering för både 2 och 3 kulor tillsammans med observatören.

Eleven visade följande förmågor: förmågan att samla matematisk information, förmågan till flexibla mentala processer, förmågan att föra ett kortfattat resonemang, strävan efter att finna den enklaste lösningen och förmågan att generalisera för både två och tre kulor.

5. Diskussion

Nedan kommer undersökningens resultat att kopplas till forskningsbakgrunden och det dras en slutsats som svarar på vår frågeställning. Avslutningsvis diskuteras metoden.

5.1 Resultatdiskussion

Nu går vi tillbaka till våra frågeställningar och försöker besvara dem genom att först sammanfatta vilka av Krutetskiis förmågor som visade sig i grupperna och sedan knyta an antalet förmågor med deras prestationer under ordinarie matematikundervisning. Även en diskussion om elevers uppfattning av problemlösning och hur Krutetskiis teorier kan användas i skolan förs och till sist sammanfattar vi vad vi kommit fram till i en slutsats.

5.1.1 Förmågor som visade sig i undersökningen

Av Krutetskiis sju förmågor förväntade vi oss att eleverna som mest skulle visa på fem förmågor. Problemet möjliggör att alla förmågor kommer fram men det kräver matematikkunskaper som vi inte tror att elever i skolår åtta besitter. Förmågan att tänka baklänges skulle kunna visa sig om eleverna tidigare har sett formeln för en aritmetisk summa, vilket behandlas först på gymnasiet. Förmågan att memorera matematiskt material är svårare för oss att avgöra om de har då vi inte vet vad de har sysslat med tidigare. Det var ingen elev som uttryckte att de använde sig av tidigare kunskaper, de kan ha gjort det ändå, men då vi inte vet säkert har vi inte med den förmågan i vår analys.

Alla grupperna förstod problemet och visade därmed på förmågan att urskilja matematisk information. I två grupper visades dessutom förmågan att tänka flexibelt och förmågan att generalisera för två kulor. Den fjärde gruppen innehöll en elev som ensam visade på alla de fem förmågor vi hoppades skulle komma fram.

Det unika med Krutetskiis teorier om matematiska förmågor är att han hävdade att de inte är medfödda utan att de formas och utvecklas genom instruktioner och övningar. Förmågor är alltid kopplade till en specifik aktivitet och kan bara visa sig i dessa. Med andra ord kan matematiska förmågor endast visa sig i en matematisk aktivitet. I problemlösning får eleverna chans att utveckla Krutetskiis förmågor på ett naturligt vis, de kommer inte till uttryck lika tydligt i en traditionell undervisning. Räknande i läroböckerna övar nästan bara upp förmågan att samla matematisk information, vilket också är den enda förmåga som eleverna i alla grupper visar. För att förbättra sin problemlösningsförmåga måste eleverna lösa många problem, det tar tid att utveckla en problemlösningsförmåga (Lester, 1996). Alltså borde problemlösning vara ett återkommande moment i matematikundervisningen.

5.1.2 Krutetskiis förmågor och elevers begåvning

Wistedt (2004) menar att det inte alltid behöver vara skolans mest högpresterande elever som har störst begåvning. Många av eleverna är understimulerade och tycker skolan är så trist att de presterar under sin kapacitet. Eleverna i grupp 1 och 2 från vår undersökning deltar i en traditionell undervisning. I den traditionella matematikundervisningen får eleverna lära sig att tillämpa metoder som läraren demonstrerar på tavlan och öva på dessa genom individuellt räknande. I denna miljö är deras tänkande och strategier mindre intressanta än det korrekta svaret på problemet och den av läroboken föreslagna metoden. De förmågor som Krutetskii (1976) beskriver som mindre avgörande i matematik är dem som skolan ofta värderar högt; snabbhet i tanken, beräkningsförmåga och minne för symboler och tal. Lester och Lambdin (2007) menar att konsekvensen av en sådan undervisning blir att eleverna i bästa fall lämnar skolan med en uppsättning fakta, procedurer och formler som förstås på ett ytligt och osammanhängande sätt vilket medför att de inte kommer att veta hur det de lärt sig kan användas utanför skolan.

I grupp 2 är elev B ett exempel på en elev som får bra betyg i den traditionella skolans matematik. När B fick en lösningsmetod på glassproblemet presenterad för sig förstod B snabbt tillvägagångssättet och kunde enkelt tillämpa den. Däremot visade B inte någon förmåga att själv hitta en fungerande metod när han ställdes inför det rika problemet vilket elev A gjorde. Elev A däremot presterar inte så mycket under lektionerna och under problemets tre första deluppgifter sitter A tyst och gungar på stolen. Vi får inte intrycket av att A arbetar med problemet. A bevisar motsatsen när deluppgiften med 2 kulor och 10 smaker skulle lösas, B börjar lösa denna genom att lista kombinationerna men A avbryter snabbt och visar på ett mönster. Vidare är Grupp 1 den grupp i undersökningen som innehåller flest högpresterande elever och vi trodde att de tillsammans skulle komma längst med problemet, istället är detta den grupp i undersökningen som visar minst förmågor. De kommer ingenstans och visar endast förmågan att samla matematisk information. Detta är en liten undersökning och vi kan inte dra några generella slutsatser men grupp 1 och elev B i grupp 2 är exempel på elever som vi tror skulle behöva öva på att tänka kreativt. När eleverna lämnar skolan kommer de inte få metoden presenterad för sig, det är därför viktigt att de får träna på att hitta egna lösningsmetoder. I undersökningen visar elev A från grupp 2 på en viss matematisk begåvning, däremot visar den inte sig på de ordinarie matematiklektionerna där elev A inte brukar vara så effektiv. Varför A inte gör något kan vi bara spekulera i, kanske är det så att A är ett exempel på det Wistedt (2004) menar med att begåvning hos elever kan visa sig på olika vis, elever som känner sig understimulerad och inte tycker att bokens uppgifter är speciellt intressanta och meningsfulla att lösa kan visa detta genom att prestera under sin kapacitet.

Europarådet (1994) slår fast att alla barn har rätt att utvecklas efter sin förmåga och det är skolans skyldighet att ge dem denna möjlighet. Kursplanen i matematik (Skolverket, 2000) betonar att problemlösning ska vara en stor del av undervisningen. Nedanstående citat tycker vi sammanfattar hur matematikundervisningen bör se ut enligt Skolverket.

> *För att framgångsrikt kunna utöva matematik krävs en balans mellan kreativa, problemlösande aktiviteter och kunskaper om matematikens begrepp, metoder och uttrycksformer. Detta gäller alla elever, såväl de som är i behov av särskilt stöd som elever i behov av särskilda utmaningar.* (Skolverket, 2000, s. 1)

Här betonas det att eleverna ska få träna på att tänka kreativt och öva upp problemlösningsförmågan samtidigt som undervisningen även ska innehålla färdighetsövningar. I Lpo 94 står det att skolan skall sträva efter att varje elev utvecklar nyfikenhet och lust att lära (Skolverket, 2006). Detta kan uppnås genom problemlösning samtidigt som förmågan att tänka kreativt, systematiskt och strukturerat utvecklas. Problemlösning skapar dessutom ett forum där man kan träna sina färdigheter och sitt symbolspråk, samt bygga upp sin begreppsförståelse (Hagland, Hedrén, Taflin, 2005). Rapporten från Skolverket (2003) visar att det är en snedfördelning mellan problemlösning och färdighetsräknande. Bilden som framträder är en undervisning som i princip enbart består av räknande i boken och där förståelse för begrepp inte blir det viktiga för eleverna, utan lektionen går ut på att hinna så långt som möjligt i boken. Samma moment återkommer varje år och elever som har lätt för matematik uttryckte att de saknar utmaningar och menar att allt är repetition, *”samma sak i sjuan, åttan och nian”* (Skolverket, 2003, s. 20).

Det finns en oro att utvecklingen av elevernas problemlösningsförmåga kommer att göra att de går miste om utvecklandet av basfärdigheter i matematik men den forskning vi tagit del av visar att elever som deltagit i en undervisning genom problemlösning klarar standardfrågor minst lika bra och presterar bättre på förståelsefrågor än vad elever som fått en traditionell undervisning gör (Cai, 2003).

5.1.3 Elevers uppfattningar om problembaserad undervisning

Det mesta av den forskning vi tagit del av har varit positiv till problemlösning och ett argument som nämns är att problemlösning kan öka elevernas intresse och motivation till att lära matematik. Grupp 3 och 4 från vår undersökning visar på motsatsen. Eleverna i de grupperna upplevdes omotiverade under arbetet med vårt problem och sa sig tycka bättre om att räkna i boken än att lösa problem. Även den elev som visade på flest förmågor under problemlösningen hade en negativ inställning till arbetssättet.

Deras ointresse kan bero på en rad olika saker. Taflin (2007) har visat att lärarens attityd till problemlösning är viktig, eleverna lär sig mer om läraren har en positiv inställning till arbetssättet. Elever måste tro på att deras lärare tycker att problemlösning är betydelsefullt för att de ska ta till sig undervisning (Lester, 1996) En annan viktig sak är att läraren måste betona för eleverna vad det är tänkt att de ska lära sig och när i processen lärandet sker. Om eleverna ska lösa ett problem och sedan diskutera de olika lösningsförslagen med varandra tar det längre tid än vad en traditionell lektion skulle göra, ett problem skulle säkert behöva delas upp på flera lektioner för att få till ett optimalt lärande. Att undervisa genom problemlösning tar längre tid men detta kompenseras av att arbetssättet främjar förståelse (Cai, 2003, Lester & Lambdin, 2007). Den traditionella undervisningen betonar inte förståelse och därför tvingar den eleverna att nöta in samma metoder och färdigheter i varje skolår. Att ha en undervisning som bygger på att samma färdigheter repeteras varje skolår legitimerar nästan att eleverna glömmer matematiken de sätts på prov i så fort provet är gjort. Istället borde eleverna ställas inför ny utmaningar när de kommer till ett nytt skolår så att de känner att de utvecklas.

Taflin (2007) visar i sin undersökning att tillfällen till matematiklärande finns under hela problemlösningsprocessen om läraren presenterar problemet på ett genomtänkt sätt och håller en gemensam genomgång i slutet av lektionen. Tillfällen till matematiklärande definierar hon som ”ett tidsintervall då en viss specifik matematisk idé behandlas av lärare eller elever” (s. 175). Om eleverna hade blivit informerade om vilka kunskaper problemlösning kan ge hade de kanske varit mer positiva. Dessutom är situationen där vi kommer ut och ger dem ett problem utan någon genomgång i början eller uppföljning på slutet inte ett bra exempel på hur man ska arbeta med ett problem. Kanske är det så här eleverna fått arbeta med problem tidigare och därför förknippar de problemlösning med något meningslöst.

5.2 Metoddiskussion

Vår undersökning består av fyra grupper som vi observerat, tre av dem gjordes genom en videoobservation och den fjärde observerades utan filmning. Grupperna som filmades visade inte någon tendens till att vara oroliga för kameran utan de koncentrerade sig på problemet. Vi ville filma gruppdiskussionerna eftersom elevernas lösningsblad ibland kan vara svårtolkade och då kan elevernas dialoger underlätta tolkningsprocessen. Filmningen ger dessutom möjligheten att gå tillbaka och analysera flera gånger.

Gruppen som inte filmades hade en dialog med observatören under hela processen, observatören var alltså närvarande under hela arbetets gång och missade därmed inga viktiga dialoger. Svagheten med en sådan observation är att den inte kan ses flera gånger och att minnet kan vara subjektivt. Observatören förde noggranna anteckningar och gruppens lösningsblad var tydligt och gjorde det lätt att följa deras tankeprocess, vi tror därför inte att det skett några missförstånd.

Vår kunskapssyn är socialkonstruktivistisk och vi tror att eleverna utvecklar sin kunskap genom dialog med varandra. Vi valde därför att ha eleverna i grupp för att vi hoppades att de skulle ha en dialog med varandra och tillsammans komma fram till en lösning på problemet. Våra intentioner uppfylldes delvis, varje grupp diskuterade med varandra men alla var inte aktiva. Tanken var att grupperna skulle delas in av deras undervisande lärare så att eleverna skulle ha ungefär samma kunskapsnivå och hamna i grupper där de kände sig trygga. Efter en analys av filmerna upplever vi att lärarna inte lyckats med detta fullt ut. Varje grupp innehåller elever som sitter tysta under hela arbetets gång och vi upplever att de inte hänger med i kamraternas resonemang. Om de hamnat i en jämnare grupp hade kanske även dessa elever visat upp matematiska förmågor.

Vi upplever att filmning är ett effektivt hjälpmedel när det kommer till att analysera matematiska förmågor. Dock lämnar det alltid rum för observatörens egna tolkningar. Vissa förmågor var enkla att upptäcka med andra krävde att vi tittade på filmerna flera gånger. Vi var inte alltid överens utan ibland var vi tvungna att diskutera med varandra för att komma fram till en gemensam tolkning. Dessutom fungerar grupparbete bra om man vill ha en dialog mellan eleverna men det kan göra det svårt att se vilka förmågor varje enskild elev besitter, så är man ute efter att bedöma enskilda elever bör man nog sitta ner och diskutera med eleven enskilt.

5.3 Slutsats

Vi går nu tillbaka till våra frågeställningar och besvarar dem.

- Vilka av Krutetskiis förmågor visar eleverna vid problemlösningen?
- Är det de högpresterande eleverna som visar på flest matematiska förmågor?

Vi undersökte fyra grupper som vardera bestod av tre till fyra elever. Gruppsammansättningen varierade, i en grupp var majoriteten högpresterande och i en annan var majoriteten lågpresterande. De fyra grupperna visade alla på förmågan att samla matematisk information. I två grupper visades dessutom förmågan att tänka flexibelt och förmågan att generalisera för två kulor. Den fjärde gruppen innehöll en elev som ensam visade på alla de fem förmågor vi hoppades skulle komma fram.

Gruppen med flest antal högpresterande elever visade enbart på en förmåga medan grupp fyra innehöll en högpresterande elev som ensamt visade alla de fem förmågor vi förväntade oss att eleverna som mest skulle kunna visa. Alltså innehåller vår undersökning både högpresterande elever som visar många av Krutetskiis förmågor och högpresterande elever som visar på få. Gruppen med både högpresterande och lågpresterande visar på ett intressant fenomen, här är det den lågpresterande eleven som ser mönstret och kan visa för den högpresterande hur den ska lösa uppgiften. Nu ska man inte dra för stora slutsatser av den lågpresterande elevens bedrifter eftersom alla grupper även innehöll lågpresterande elever som satt tysta och inte bidrog alls i lösningsprocessen. Vad vi kan säga är att av de 14 elever som ingick i undersökningen fanns där en elev som visade på mer matematisk begåvning än vad som framkommer på ordinarie lektioner och denne elev borde inte vara ensam. Avslutningsvis kan vi i vår undersökning inte se något samband mellan elevers betyg och antalet förmågor de visar upp vid problemlösning.

6. Sammanfattning

Vårt syfte med uppsatsen är att se vilka matematiska förmågor som kommer till uttryck under problemlösning och om det är de högpresterande eleverna som visar på flest förmågor. I uppsatsen observerade vi elever i skolår åtta när de löste ett rikt matematiskt problem (se 3.2 för definition) och besvarade frågorna:

- Vilka av Krutetskiis förmågor visar eleverna vid problemlösningen?
- Är det de högpresterande eleverna som visar på flest matematiska förmågor?

Högpresterande elever definierar vi som elever med minst VG i betyg.

Grundskolans kursplan för matematik säger att matematikundervisningen i stor del ska bygga på problemlösande aktiviteter och sträva efter att få eleverna att kunna kritiskt granska varandras lösningar och argumentera för sin ståndpunkt. För att förbättra sin problemlösningsförmåga måste eleverna lösa många problem (Lester, 1996) och därför måste det vara ett återkommande moment i undervisningen om Skolverkets strävansmål ska uppfyllas

Under 1950- och 60-talet utförde Krutetskii en väldigt omfattande undersökning på skolbarns matematiska förmågor. Den experimentella delen av forskningen pågick under 12 år inkluderade ungefär 200 elever. Krutetskii hävdade att matematiska förmågor inte är något förutbestämt, medfött, utan att de formas och utvecklas genom instruktioner, övningar och bemästrande av en aktivitet och att det inte går att förutsätta hur långt eleverna kan utvecklas. Krutetskii tar upp sju olika matematiska förmågor, indelade i tre olika grupper som han ansåg var de olika steg man löste ett problem i; Informationsinsamling, informationsbehandling och informationsretention.

Uppsatsens fallstudie gjordes i slutet av vårterminen på två skolor i mindre orter i södra Sverige. Undersökningsgruppen bestod av 14 elever i skolår åtta som delades in i fyra grupper. Gruppsammansättningen var varierande, i en grupp var majoriteten högpresterande och i en annan var majoriteten lågpresterande. De fyra grupperna visade alla på förmågan att samla matematisk information. I två grupper visades dessutom förmågan att tänka flexibelt och förmågan att generalisera för två kulor. Den fjärde gruppen innehöll en elev som ensam visade på alla de fem förmågor vi hoppades skulle komma fram.

I undersökningen framkommer det både högpresterande elever som visar många av Krutetskiis förmågor och högpresterande elever som visar på få. Gruppen med både högpresterande och lågpresterande visar på ett intressant fenomen, här är det den lågpresterande eleven som ser mönstret och kan visa den högpresterande hur uppgiften kan lösas. Nu ska man inte dra för stora slutsatser av den lågpresterande elevens bedrifter eftersom alla grupper även innehöll lågpresterande elever som satt tysta och inte bidrog alls i lösningsprocessen. Vad vi kan säga är att av de 14 elever som ingick i undersökningen fanns där en elev som visade på mer matematisk begåvning än vad som framkommer på ordinarie lektioner och det borde finnas flera. Avslutningsvis kan vi i vår undersökning inte se något samband mellan elevers prestationer i den ordinarie matematikundervisningen och antalet förmågor de visar upp vid problemlösning.

Referenser

Bell, J. (2000). *Introduktion till forskningsmetodik.* Lund: Studentlitteratur

Cai, J. (2003) *What research tells us about teaching mathematics through problem solving.* Hämtad från Internet 100504:
http://tlsilveus.com/Portfolio/Documents/EDCI327_ProblemSolving.pdf

Cobb, P., Yackel, E. (1996). Constructivist, Emergent, and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research. *Educational Psychologist*, 31(3), 175-190.

Engström, A (1997). *Reflektivt tänkande i matematik.* Stockholm: Almqvist & Wisell International

Engström, A. (2005). Matematikbegåvningarnas revansch?. *Nämnaren*, 32(2), 19-21.

Europarådet. (1994). *Recommandation 1248 on education for gifted children.* Hämtad från Internet 100510:
http://assembly.coe.int/Mainf.asp?link=/Documents/AdoptedText/ta94/EREC1248.htm

Hagland, K., Hedrén, R., Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem.* Stockholm: Liber AB.

Krutetskii, V.A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago och London: The University of Chicago Press.

Lester, F. (1996). Problemlösningens natur. I G.Emanuelsson, K.Wallby, B. Johansson, & R. Ryding (red.), *Matematik – ett kommunikationsämne* (s. 85-91). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Lester, F., & Lambdin, D.V. (2007). Undervisa genom problemlösning. I J. Boesen, G. Emanuelsson, A. Wallby, K. Wallby (red.), *Lära och undervisa matematik – internationella perspektiv* (s. 95-108). Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Maher C. A. (1998). Kommunikation och konstruktivistisk undervisning. I A. Engström (red), *Matematik och Reflektion* (s. 124-143). Lund: Studentlitteratur

Skolverket. (2006). *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet – Lpo 94.* Hämtat från Internet 100517: http://www.Skolverket.se/publikationer?id=1069

Mouwitz, L. (2007). DPL 33: Vad är problemlösning?. *Nämnaren,* 34(1), 61.

Skolverket.(2000). *Kursplan för matematik.* Hämtat från Internet 100503: http://www.Skolverket.se/sb/d/2386/a/16138/func/kursplan/id/3873/titleId/MA1010%20-%20Matematik.

Skolverket. (2003). *Nationella kvalitetsgranskningar 2001-2002 Lusten att lära – med fokus på matematik. Skolverkets rapport nr. 221.* Stockholm: Fritzes.

Stensmo, C. (2007). *Pedagogisk filosofi.* Lund: Studentlitteratur.

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfälle för lärande.* Umeå: Doctoral Dissertation, Umeå University.

Vetenskapsrådet. (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning.* Hämtat från Internet 100503: http://www.vr.se/download/18.7f7bb63a11eb5b697f3800012802/forskningsetiska_principer_tf_2002.pdf

Wistedt, I. (2004). *Pedagogik för elever med förmåga och fallenhet för matematik.* Hämtat från Internet 100510: http://w3.msi.vxu.se/~hso/gifted_vr_hemsida.pdf

Wistedt, I. (2005). En förändrad syn på matematikbegåvningar?. *Nämnaren,* 32(3), s. 53-55.

GLASSARNA

Ni ska köpa kulglass på Lilla torget i Kristianstad och kan välja på 4 olika smaker. Ni vill ha 2 kulor. Ni får inte välja samma smak två gånger och om ni först tar en kula päron och sedan en kula choklad, så räknas det som samma sak som att först ta choklad och sedan päron.

a) Hur många olika kombinationer kan ni göra?

b) Om ni istället kan välja mellan 5 olika smaker, hur många olika kombinationer kan ni göra då?

c) Om ni ska välja 3 kulor och har 5 smaker att välja på, hur många kombinationer kan ni då göra?

d) Mer troligt är att där finns 10 smaker, på hur många vis kan ni kombinera er glass om ni tar 2 respektive 3 kulor?

e) Om det finns n antal smaker, hur många kombinationer kan ni då göra med 2 kulor, 3 kulor, k kulor?

Hej!

Vi är två lärarstudenter som läser vår sjätte termin på lärarutbildningen.
Vi ska nu börja skriva en c-uppsats som handlar om problemlösning i matematik.
Till denna uppsats skulle vi vilja göra en undersökning där era barn ska medverka.
Vi vill därför be om ert tillstånd att få filma era barn när de tillsammans med två klasskompisar löser ett matematiskt problem. Filmen kommer endast att ses av oss två och om vi refererar till eleverna kommer vi att använda påhittade namn.

Elevens namn:

____

Härmed godkänner jag att mitt barn filmas:

____

Namnförtydligande:

____

Tack på förhand!

Madeleine och Johan