HÖGSKOLAN
KRISTIANSTAD

EXAMENSARBETE

Hösten 2007

Lärarutbildningen

En hel del om yngre elevers förståelse av det matematiska begreppet del av

En undersökning av 21 elever

Författare
Jack Larsson
Ann-Catrin Olsson

Handledare
Kristina Juter

www.hkr.se

Yngre elevers förståelse av det matematiska begreppet del av –

bryggan mellan den personliga erfarenheten och skolans tanketraditioner.

En undersökning av 21 elever.

Abstract

Uppsatsen avhandlar hur yngre elevers vardagsanknytning kan fungera som en brygga mellan den personliga erfarenhetsvärlden och skolans tanketraditionen. Vi vill med detta arbete belysa hur elever använder sig av sitt informella kunnande när de löser matematiska uppgifter. Som ett led i den forskningen som efterfrågas i litteraturen kring elevers förståelse av momentet bråk inom matematiken.

Undersökningen grundar sig på frågeformulär och samtal med respondenterna. Vi har genomfört vår undersökning på tre skolor där 21 elever i ålder 6-8 år med olika etniska bakgrunder medverkat.

Eleverna ser i huvudsak matematik som ett skolämne och inget som de har nytta av i sin vardag. Undersökning visar på att eleverna använder sig av sina informella kunskaper när de löser uppgifterna i frågeformuläret.

Ämnesord: hel, del, del av, matematisk förståelse, tidigare erfarenheter

INNEHÅLL

Förord

Vi vill tacka alla pedagoger och föräldrar som har ställt upp och gjort det möjligt att genomföra detta examensarbete. Ett stort tack till alla elever som ställt upp på våra intervjuer och delat med sig av sina erfarenheter och tankar. Det har inte alltid varit helt lätt för eleverna att kunna förklara för oss hur de har tänkt, och som vuxen är det inte alltid så lätt att förstå. Vi vill också framföra ett stort tack till vår handledare Kristina Juter, som funnits tillgänglig under hela arbetsprocessen.

Till sist tackar vi varandra för ett mycket gott samarbete och en rolig tid.

Trevlig läsning önskar Ann-Catrin och Jack

1 Inledning

> ”Ur barnens synvinkel kommer sig det stora slöseriet i skolan av att de inte inom skolan på ett fritt och fullständigt sätt får använda sig av de erfarenheter de fått utanför skolan, medan de, och andra sidan, inte kan använda det de lärt sig i skolan i det dagliga livet. När barnen kommer in i klassrummet måste de sluta upp att tänka på en hel del av det de funderar över, idéer, intressen och aktiviteter som dominerar hemmet och omgivningen. Utan att kunna utnyttja denna vardagserfarenhet börjar skolan att mödosamt arbeta i en helt annan riktning och försöker med olika medel väcka barnets intresse för skolarbetet.”
>
> John Dewey 1899 (Individ, skola och samhälle, 1980)

Med hänvisning till den demokratiska värdegrund som skolan idag vilar på kunde det förväntas vara självklart att elevers tidiga erfarenheter av delning, till exempel dela lika, tas tillvara. Då denna tidiga erfarenhet av delning har stor betydelse för att relationen del-del, del-helhet och *del av* [skribenternas tillägg] skall utvecklas. Den erfarenheten är också enligt (Engström, 1997) grundläggande för att elevers bråkföreställningar utvecklas.

Lpo 94 fastslår att skolan ska vila på demokratiska värderingar och att aktning ”för varje människas egenvärde” ska främjas (Lärarens handbok, 2004:9). Det står också att undervisningen ska ta sin ”utgångspunkt i elevernas bakgrund, tidigare erfarenheter, språk och kunskaper” (a.a., 2004:10), vilket också stämmer överens med Vygotskys syn om lärandet som ett samspel mellan individen och miljön.

I Lpo 94 talar man om tre aspekter av kunskap, 1; den konstruktiva – att kunskap inte är en avbild av omvärlden utan något som människan skapar för att förstå sin omvärld. 2; kontextuella – att kunskaper är situationsbundna, 3; funktionella – använda kunskaper som verktyg.
I kursplanen för matematik under mål att sträva mot står det att matematikundervisningen ska ”sträva efter att eleven – […] får tilltro till det egna tänkandet och den egna förmågan att lära sig matematik och att använda matematik i olika situationer,” (Kursplaner och betygskriterier 2000, 2002:26). Men får eleverna använda sig av sina tidigare erfarenheter? Finner de mening med skolarbetet? Har de någon praktisk nytta av skolans matematikundervisning? Det är frågor som pedagoger borde ställa sig.

Många studier har visat att redan när barn börjar skolan har de utvecklat en informell kompetens och har egna sätt att lösa matematiska dilemman, detta är något som skolan inte alltid tar tillvara.

I denna undersökning kommer bryggan mellan den personliga erfarenheten och skolans matematiska tanketraditioner kring begreppet del av hos yngre barn att avhandlas.

1.1 Syfte

I många undersökningar framgår det att eleverna upplever skolans miljö som en isolerad del av livet där deras erfarenheter och funderingar inte alltid får plats eller stämmer överens med skolans intentioner om vad som är angeläget. Genom att använda de erfarenheter eleverna fått utanför skolan, finns det förutsättningar för att skapa en brygga mellan deras personliga erfarenhetsvärld och skolans kulturella tanketraditioner. Detta skulle då underlätta arbetet att tillsammans bygga upp ett intresse för skolarbetet.

Genom att undersöka hur barn använder sig av sitt informella kunnande när de löser matematiska uppgifter, vill vi med vår undersökning medverka till den matematikforskningen som efterfrågas i litteraturen kring elevers förståelse av momentet bråk.

Behovet av vidare forskning kring elevers förståelse för olika delar av bråk tar bland annat undersökningar i *Educational Studies In Mathematics* upp i två av sina utgåvor för 2007. Även Engström (1997) och Wistedt (1992) eftersöker mer omfattande forskning för att visa på de metoder som eleverna använder sig av när de försöker göra det matematiska tänkandet till sitt. För att på så sätt medverka till att reformulera lärarnas arbetsuppgifter från överföring av kunskap till lärandesituationer. ”Barn saknar inte logisk förmåga” utan använder den annorlunda än vuxna gör (Engström, 1997:192).

Syftet med arbetet är att undersöka hur yngre elever spontant använder sig av sitt informella kunnande, när de löser matematiska uppgifter kring del av i skolan.

1.2 Bakgrund

Elever har redan vid skolstarten tillgodogjort sig en hel del kunskaper och erfarenheter som har med matematik att göra även om de inte är medvetna om det. I skolan möter de ofta ett språk som är fjärran från deras dagliga erfarenheter och det språk de använder till varandra och även till vuxna utanför skolans värld. Eftersom ämnet matematik kräver en hel del abstrakta termer och uttryck som många barn upplever främmande, är det inte underligt att det uppstår en diskrepans mellan sådant som eleverna känner till och de ofta abstrakta termer och problemformuleringar som läraren formulerar (Kronqvist & Malmer, 1993).

Det är viktigt att prata och skriva om matematik för att lära sig. Genom att eleverna får prata, skriva och reflektera över sina tankar om matematik hjälper det dem att dra logiska slutsatser och utveckla sina matematiska kunskaper, detta är Reys, Lindquist, Lambdin & Smith (2000) överens om med Vygotsky. Vygotsky ”believe that learning is a social experience – that is, interactions with others challenge learners to make sense of new ideas” (a a., 2000:32).

Att elevernas föreställningar om verkligheten skall lyftas fram är ingen ny pedagogisk idé. Redan vid förra sekelskiftet och framgent har det debatterats om och hur elevernas erfarenheter kan användas i matematikundervisningen. En frågeställning som hela tiden återkommer under historiens gång är: Hur kan man få eleverna att knyta an till sina erfarenheter för att därifrån utveckla sina personliga tankar när de möter undervisningsinnehållet? (Wistedt et al.., 1992).

På 1970-talet intensifierades åter intresset för kunskaper som elever tillgodogjort sig i sin vardag, och som de sedan tar med sig till skolan. På grund av detta intensifierades intresset genomfördes en rad studier. Så idag vet vi mer om möjligheterna att använda deras erfarenheter och också om svårigheter att använda dessa.

1.3 Definitioner

Del av – för att få ett enhetligt namn på det som andra forskare kallar både del-hel och del-del använder vi oss av uttrycket *del av* i arbetet om det inte är ett specifikt tillfälle där det behövs del-hel eller del-del.

Vardagskunskap eller informellt kunnande: Definieras i uppsatsen som att det finns olika innebörd i ordet vardagskunskap. Kunskapen kan vara det barn och vuxna förnimmer spontant i sin vardag eller kunskaper som man behöver.

Skoliferad innebär att eleverna skolats in i den kulturella tanketraditionen inom skolan. Detta sker när eleven går från sitt eget informella tänkande till skolans mer formella.

1.4 Uppläggning av uppsatsen

Först presenteras en inledning med syfte och bakgrund där arbetet ges en introduktion. Här tas även ord upp som kan behöva ett förtydligande.

Under andra rubriken kan man läsa om tidigare forskning, vad teorier och styrdokument tar upp. Här presenteras även begreppsbildning och strategier samt invändningar mot att använda det informella kunnandet i skolan. Därefter följer problempreciseringen.

Under fjärde rubriken presenteras metodval med bland annat urval, genomförande, tillförlitlighet och metodkritik.

Därefter redovisas undersökningens resultat, där varje intervjufråga presenteras för sig. I några fall med ett eget stycke angående elevernas lösningsstrategier.

Arbetet avslutas med en diskussionsdel där vi slutligen reflekterar över undersökningens resultat och sätter in den i ett större sammanhang.

Till detta kommer en referenslista och bilagor med vårt frågeformulär, intervjuprotokoll samt medgivandeintyget till föräldrarna.

2. Forskningsbakgrund

Det var omkring år 1600 när den orientaliska medeltida och den grekiska traditionen möttes som den moderna algebran och matematiken blev symboliskt abstrakt (Katz, 1998). Egyptierna utvecklade under sin storhetstid före Kristus ett talsystem med talstreck som varierades med talens storlek. Med dessa streck kunde man utföra de fyra räknesätten. Man använde sig inte av tecken för att utföra dessa, utan uträkningen beskrevs i ord istället. I antikens Grekland uppfattades tal som storheter, till exempel skrev man ett halvt A som A/2. Bråk är den första mer abstrakta matematiken som eleverna möter i skolan. Förklaringen till detta är att eleverna skall vara bekanta med de naturliga talen innan de presenteras för de rationella. Det är först under det fjärde skolåret i grundskolan som eleverna presenteras för relativa tal i bråkform och decimalform (Engström, 1997).

I dagens samhälle, arbetsliv och vardagsliv spelar matematiken en stor roll. Människor utvecklar egna matematiska strategier som förenklar deras liv. Både internationellt och nationellt finns det idag kritik mot elevers kunskaper i matematik, man menar på att många elever inte förstår matematikundervisningen (Wistedt, 1992). För barn är matematiken sammanbunden med den sociala kontext de lever i och flera studier visar på att barn kan mycket kring matematik innan de får någon reell undervisning (Engström, 1997; Ahlberg, 2001). I skolans värld har man enligt tradition lärt ut en dekontextualiserad form av matematik som gärna lutar sig mot att det finns ett givet innehåll som genom lärarens försorg skall förmedlas till eleven (Engström, 1997).

Efter några år av skolning har många elever skolifierats och ersatt det informella kunnandet med det formella som de då tillämpar på ett mekaniskt sätt. Detta leder till att många elever får det svårt att omsätta sina inlärda kunskaper. Utifrån matematiska metoder som många barn och vuxna lärt sig i skolan kan de också få svårigheter med att lösa vardagsproblem som de ställs inför där de tidigare använt egna strategier. Man kan ställa sig frågan varför de inte kan se relationen mellan deras tänkande för problemlösning utanför skolan och den som de lärt sig i skolan. En förklaring till detta menar många forskare går att söka i undervisningens innehåll och upplägg (Bergius & Emanuelsson, 2000; Wistedt, 1992 & 1996; National Research Council, 2001; Ahlberg, 2001; Solem & Reikerås, 2004).

2.1 Forskning kring lärande

2.1.1 Teori

Alla teorier har fångat centrala delar av verkligheten, men ingen teori kan lösa alla problem utan tillsammans utgör de en plattform att utgå ifrån (Høines, 1997)

Som företeelse är lärandet osynligt. Vad som däremot kan ses är hur en människa gör och utifrån det kan vi dra slutsatsen att personen ifråga måste ha lärt sig något (Säljö, 2005). I Hydén (1981) citeras Vygotsky ”All den inlärning barnet möter i skolan har sin förhistoria.” (Neuman, 1989:74). I avsnittet presenteras fyra olika lärandeteorier, som har haft stor inverkan på sättet att undervisa.

2.1.1.1 Thorndike och associationsteorin

I början av 1920-talet gjorde Thorndike en stor studie om det mänskliga tänkandet och grundlade därmed associationsteorin. Resultatet av studien redovisade han i boken *The Psychology of Arithmetic* 1922. Hans teori går ut på att all inlärning börjar med försök och misslyckanden för att leda fram till en riktig lösning – trial and error. Thorndike kallade detta ”law of effect”, det vill säga att man fortsätter göra det som ger tillfredställelse men undviker det som ger ogynnsamma konsekvenser för en själv. Till följd därav reflekterar man inte över individens kreativitet och nyskapande, utan menar på att allt lärs med upprepad träning. En konsekvens för matematikundervisningen är att den blir mekaniserad, man uppnår resultat enbart genom träning (Ahlberg, 1995; Maunula, 1996; Wikipeida [www]).

2.1.1.2 Skinner och behaviorismen

Skinners teorier om inlärning är att den ska ske i små (Reys et al., 2006) steg så att den rätta ”stimulus-respons-reaktionen kan utvecklas och befästas” (Ahlberg, 1995:23). Undervisningsprogrammen är uppbyggda på så vis att det är en gradvis stegring med flera frågor på varje svårighetsgrad och eleven får en omedelbar bekräftelse på om han/hon svarat rätt eller fel. För matematiken har detta fått konsekvensen att undervisningen blivit formaliserad i form av introduktion, övning och tillämpning. Genom att eleven tränar ett förfaringssätt tillräckligt många gånger blir den befäst och kan sedan praktiseras på läroboken eller av läraren förberett problem. Det gör matematiken till ett färdighetsämne, där själva räknandet får en central roll, med andra ord *övning ger färdighet,* men den har en nackdel, den lämnar elevens eget tänkande därhän. Många dataprogram för matematikundervisning är uppbyggda enligt denna princip (Engström, 1997; Reys et al., 2006).

2.1.1.3 Piaget och konstruktivismen

Piaget hävdar att barns intelligensutveckling följer den historiska kunskapsutvecklingen. Exempelvis utvecklingen av positionssystemet, som mänskligheten behövde flera tusen år för att fullborda, är också besvärlig för barn att lära sig på lågstadiet. Han menar också att det är genom handling människan får en förändrad syn av omvärlden och kunskapen är uppbyggd av tankestrukturer (Høines, 1997). Kunskap är med andra ord inte knutet till tingen själva, utan till vad man gör med dem, och vilka erfarenheter man får av detta/dessa. Något som anförs mot Piagets teorier och ses som en brist är att han inte i sin forskning tar upp språket och språkutvecklingen i kunskapsutvecklingen hos barnet (a.a.).

Genom människans handlande och reflektion förändras hennes tankestrukturer, bland annat när hon växlar mellan teori och praktik. När barnet har uppnått en reversibel tankekonstruktion, till exempel att barnet kan se att en grupps mängd inte beror på spridningen utan på antalet, innebär det att det kan utföra både konkreta och abstrakta operationer. Och enligt Piaget är det först då de kan tillägna sig matematisk förståelse. De får ingen numerisk förståelse förrän de nått det konkret fungerande steget vid 7 till 11 års ålder. Det innebär att elevernas mognad och erfarenhet bestämmer utformningen på undervisningen, läraren blir en länk mellan elev och stoff (Ahlberg, 1995; National Research Council, 2001; Eriksson, 1996; Høines, 1997).

2.1.1.4 Vygotsky och den sociokulturella inriktningen

Vygotsky anser att kunskap och lärande är invävt i en social kontext. Språket är inte ett resultat av begreppsutvecklingen utan en del av själva begreppet. Genom språkanvändningen utvecklar vi begreppsinnehåll och begreppsuttryck. Det är svårt att få en utveckling på begreppsinnehållet utan att utveckla ett heltäckande språk, med andra ord kan man inte betrakta talet som enbart ett kommunikationsmedel utan också som ett hjälpmedel i själva begreppsutvecklingen. *"Vi knyter alltså våra tolkningar till situationer och föremål beroende på de erfarenheter vi har och på tidigare förvärvade kunskaper." (*Høines, 1997:69*).*

Vygotsky hävdar att kunskap inte är kunskap utan sitt sammanhang, ”den kan bara ge mening och skapa motivation om den ingår som en del av en helhet” (Dysthe, 1996:106), där man varierar mellan praktik och teori (Eriksson, 2000). Stoffet som ska läras är förtolkat av andra, det vill säga medierat (Säljö, 2005). Elever har en bas av kunskap att stå på men för att komma vidare måste de enligt Vygotsky arbeta tillsammans med mer erfarna kamrater eller någon vuxen för att ha en potential möjlighet att gå in i nya områden (som han även kallar för zoner av möjlig utveckling) (Williams, Sheridan & Pramling, 2000:23). Elever har två nivåer av utveckling, den första är där de befinner sig för tillfället i sin utvecklingsprocess som kan förklaras med vad barnet kan göra självständigt. Den andra nivån är då barnet löser uppgifter tillsammans med en annan kamrat eller någon vuxen, det vill säga zonen för möjlig utveckling (a.a.).

2.1.2 Begreppsbildning

I litteraturen beskriver olika författare begreppsbildning och hur den utvecklas. Spontan begreppsutveckling för barn, enligt Säljö (2005), uppstår i vardagliga interaktioner med människor och saker. Vetenskapliga begrepp möter eleven som språkliga termer och dessa presenteras oftast av en pedagog. Förståelsen av dessa begrepp tar vägen över det abstrakta till det konkreta. I skolan utvecklas (då) ett enhetligt begreppssystem för att få ett gemensamt språk (Säljö, 2005).

Ahlberg (2001) beskriver det som att sätta ord på det man ser och gör i vardagen leder till att man synliggör det man håller på med. Man sätter ord på sina upplevelser. Mycket av förståelsen i matematikundervisningen handlar om den språkliga kapaciteten av att förstå de matematiska symbolerna. När barn erfar utvecklas de och ser samband, till skillnad mot när de lär sig utantill och upprepar mönster.

Eriksson (2000) menar att begreppsbildning vilar på upplevelser i omvärlden och måste alltid ha ett innehåll och ingå i en kontext som är förmedlad genom språket. Høines (1997) anser att först när begreppsunderlaget finns etablerat hos eleverna, kan vi utveckla deras matematikspråk. Olsson (i Claesdotter, 2002:30) liknar det vid att man ”behöver tumgreppet för att ta upp en pärla från bordet”, om barn äger ett språk kan de också utveckla matematiska begrepp, språket blir då vår ”mentala tumme”.

2.1.3 Informellt lärande

I interaktion med omgivningen grundlägger barn tidigt sin förståelse för tal och räknefärdigheter, skriver Ahlberg (2001). Barn har innan skolstart skaffat sig erfarenheter som har med matematik att göra, även om de inte är medvetna om det. Kronqvist (1993) pratar om en *intuitiv kunskap*. Men det är inte troligt att de kan känna igen eller beskriva räkneproblemet i form av algoritmer (Reys et al., 2006).

Innan barnen börjar skolan kan de lösa många enkla vardagliga räkneproblem. När de sedan kommer till skolan kan många av dem (oftast) räkna till exempel att ”ett plus ett är två” och ”två och två är fyra”. De kan oftast också dela åtta kakor på fyra rättvist, så att varje barn får två kakor var, men de kan inte lösa problem som 8÷4=2 (Reys et al., 2006).

2.1.4 Formellt lärande

När det är dags för barnen att börja skolan kommer de för första gången i kontakt med den formella matematiken. De ska där bygga upp en förståelse för talens innebörd, som oftast är helt olik den de mött tidigare i sitt liv. Att tillägna sig förståelse av matematik sker under en stegvis process som leder till alltfler och mer avancerade räkneoperationer, som i sin tur leder till en hel del abstrakta termer och uttryck som är främmande för många barn. Det vill gärna uppstå ett glapp mellan vad eleverna känner till och det läraren undervisar om, och detta kan leda till kommande blockeringar där eleverna kan hamna i svårigheter. En konsekvens som kan uppstå är att eleverna kan överge sitt eget sätt att räkna och överlåter till läraren att tillhandahålla lösningar (Ahlberg, 2001; Bergius & Emanuelsson, Wallby et al. (red.), 2000; Emanuelsson (red), 1996; Kronqvist, 1993).

Målet med matematikundervisningen är att bibringa eleverna förståelse av abstrakta strukturer och relationer. Ett kritiskt skede när det gäller barns matematiska lärande är mötet med det abstrakta matematikspråket. Om undervisningens krav och elevernas möjligheter att lyckas stämmer överens, stärker man elevernas matematiska självförtroende (Ahlberg, 2001:63). Om aktiviteten ska få en mening och väcka barnens intresse måste den vara meningsfull och knyta an till deras verklighet (Wistedt et al., 1992). Reys et al. (2006) skriver att det är viktigt att komma ihåg att konkret matematik är ett relativt begrepp. För ett barn är fyra kakor delat på två personer en konkret räkneuppgift, ett annat barn kan uppfatta 4÷2 som konkret men uppfattar 4÷□=2 som abstrakt. Förståelsen för de konkreta matematiska begreppen får en naturlig utveckling skriver Reys et al. (2006) om begreppen har fått en meningsfull innebörd för eleverna.

2.1.5 Bråk

För många elever är tal i bråkform det största steget från deras vardagstänkande till det skolifierade formella tänkandet. I sitt vardagsliv har de mött begreppen lika mycket, hälften och halv, när de delat till exempel apelsiner och äpplen. För att eleverna ska förstå bråk måste de enligt Reys et al. (2006) först förstå lika delning innan de introduceras med begreppen, som del och del av, dessa begrepp utvecklar de genom en växelverkan. De börjar med relationen del-del, det vill säga de ser halv-halv, mindre/större än och lika med innan de får grepp om relationen del-helhet, för att efterhand sammanföra dem. ”Delen blir något som ingår i helheten och denna någon består av delar.” (Engström, 1997:86). För att sedan gå vidare med symboler och mer komplicerade uttryck, det vill säga att 1/2 kan tecknas som 4/8 (Reys et al., 2006).

2.2 Styrdokument

I styrdokumenten, kursplaner och läroplan, står det entydigt att skolan ska ge alla elever sådana baskunskaper, både praktiska och mentala, att de kan använda dem i det vardagliga livet och för att vara en del av samhället, samt för fortsatta studier. Enligt kursplanen ska eleverna få möjlighet att lära sig matematik, i för dem, meningsfulla och relevanta situationer där de lär sig att kommunicera kring matematik för att öka sin förståelse och få nya insikter i ämnets alla delar. En viktig del i detta är att eleverna ”utvecklar intresse för matematik samt tilltro till det egna tänkandet och den egna förmågan att lära sig matematik” och att använda den (Kursplaner och betygskriterier 2000, 2002:26; Lärarens handbok, 2004). Att få en god grund i matematik börjar med att eleverna får ”en grundläggande taluppfattning” i de olika delarna samt förstår de fyra räknesätten (a.a., 2002:28).

2.3 Invändningar mot vardagsanknytning

Det finns forskare som visar på svårigheter att utgå från elevers tidigare erfarenheter, man menar bland annat att man förväxlar den vuxnes och barnets perspektiv när man tror att barn ser matematik i vardagen. Barn och vuxna har skilda perspektiv på omvärlden, vad som är viktigt och meningsfullt för en vuxen kan helt sakna mening för en elev. Att fundera över den praktiska nyttan med vissa aktiviteter är ett exempel på vuxentänkande. ”Barn spelar inte fotboll för motion, de läser inte för att få språkträning och de snickrar inte för att öva sin finmotorik.” (Wistedt et al., 1992:11).

När man förberedde den nya läroplanen för grundskolan poängterades det att man inte skulle lägga en för stor betydelse vid det som barn har att erbjuda. Tidigare läro- och kursplaner har däremot framhållit betydelsen av att utgå från barns erfarenheter i undervisningen. Wistedt (1996) menar på att det finns forskning som hävdar att det eleverna lär i skolan inte kan ses som en direkt förlängning eller fördjupning av tidigare erfarenheter från vardagen. När elever ska lära sig något nytt måste de använda sig av sina tidigare erfarenheter, det finns dock en risk att eleven tillrättalägger den nya faktan så att den passar in i deras tidigare tänkande. Denna risk accentueras om eleven inte får arbetar tillsammans med andra (Wistedt et al., 1992; Wistedt, 1996:65).

2.4 Del av – strategier

2.4.1 Förhållningssätt

Relationen mellan elev och problem är situationsbundet, elevernas lösningsstrategier är beroende på deras förhållningssätt, inriktning och uppfattning. *Förhållningssätt* innebär hur de upplever problemlösningssituationen och om de har tidigare erfarenheter av problemlösningen. *Inriktning* innebär hur eleven tar sig an problemets innehåll. Eleverna kan ha ett öppet eller förgivettaget förhållningssätt till problemet. *Uppfattning* innebär hur eleven uppfattar det matematiska innehållet i problemet, (alltså) om de fokuserar på tal och räkneoperationen eller om de ser vad som efterfrågas (Ahlberg, 1995).

Piaget har gjort ett schema för hur elever förhåller sig till ett problem. 1; hur eleven känner igen en situation, 2; det finns en bestämd handling associerad med situationen, 3; eleven väntar sig att handlingen ska ge samma resultat som tidigare. Om inte handlingen ger samma resultat uppstår en konflikt som kan leda till besvikelse eller överraskning. I det första fallet leder det till ett förändrat igenkännande och i det andra fallet ett förändrat förhållningsmönster (Engström, 1997:132).

2.4.2 Strategier

Det finns två vanliga strategier att använda vid division – del av, 1; innehållsdivision eller measuerment problems, här vet man antalet objekt i varje grupp, men man måste ta reda på hur många grupper det blir. 12 pennor ska till exempel delas upp, så att varje grupp får 3 pennor. Hur många grupper blir det? Strategin innebär att man använder en upprepad subtraktion genom att ta tre varje gång.

Den andra strategin kallas delningsdivision eller partition (sharing) problems. Här vet man gruppernas antal men man ska ta reda på hur många objekt varje grupp får. Till exempel 12 pennor skall delas lika mellan 4 grupper. Hur många pennor får varje grupp? (Kronqvist & Malmer, 1993; Reys et al., 2006).

Engström (1997) använder sig också av ett schema som Hunting et al. utarbetat för barns förståelse av del och del av som är indelat i tre kategorier. 1; kvalitativ enhet – barnet riktar liten uppmärksamhet åt delarnas storlek, volym och antal. Barnet delar till exempel en flaska läsk i ojämna delar och det kan bli lite över i flaskan. 2; kvantitativ enhet – barnet uppfattar likheten som relativt oberoende av kontexten. Man kan se att en halv banan och ett halvt äpple är två hälfter. 3; abstrakt enhet – barnet har full förståelse av relationen mellan delarna, att en halv består av två fjärdedelar. Samma indelning av kategorier och definitioner gör Empson et al. (2006, vol. 63) i sin avhandling kring barns tänkande om del av.

3. Problemprecisering

Tanken att elevens befintliga kunnande bör utgöra grund för inlärning finns formulerad redan i den sokratiska majevtiken. Syftet med undersökningen är att ta reda på hur eleverna använder sin vardagliga matematik. Om de explicit använder sina egna erfarenheter och om dessa erfarenheter underlättade problemlösningen.

Hur kan vi förstå barns matematiska kunskap såsom de konstruerar den från sina erfarenheter av begreppet del av. För att få svar på detta har vi två frågeställningar:

- Hur förstår yngre elever det matematiska begreppet del av?
- Använder sig elever av sina tidigare matematiska kunskaper?

4. Metod

Under den här rubriken presenteras vilka undersökningsmetoder som använts, hur urvalet har gjorts, hur undersökningen genomförts och hur tillförlitlig denna är. Här tas även upp hur materialet har bearbetats samt metodkritik.

4.1 Förväntningar

Utifrån skribenternas egna erfarenheter av barn förväntades det att eleverna skulle dela rättvist. Och det skulle genomsyra deras tänkande. Också att barnen skulle känna sig viktiga och försöka göra rätt när de intervjuades. Eftersom vi kom in och avbröt dem i deras lektioner, befarade vi, att en viss kontextbundenhet skulle påverka dem när de besvarade våra frågor.

4.2 Metodval

Undersökningen lutar sig på surveystrategin, ”ett tillvägagångssätt som inrymmer empirisk forskning vid en bestämd tidpunkt, och som eftersträvar så omfattande och fullständiga data som möjligt” (Denscombe, 2000:13). I denna strategi ingår intervjuer och frågeformulär som olika metoder. Strategin kan användas både, som i det här fallet, i småskalig forskning och i större sammanhang.

4.2.1 Pilotundersökning

För att testa frågornas relevans för undersökningen genomfördes en pilotintervju med fyra elever på en medelstor skola i rätt åldersspant. Detta gjordes för att få en uppfattning om tidsåtgången, samt för att få en uppfattning om hur respondenterna uppfattade frågorna, till exempel om frågorna var tydliga nog, och om de gick att missuppfatta. Resultatet och intrycket av intervjun var sedan till stor hjälp för utformningen av de slutliga frågorna.

4.2.2 Semistrukturerade intervjuer

Till undersökningen har det använts semistrukturerade personliga intervjuer som spelats in på ljudband. För intervjuerna användes en lista med färdiga frågor (bilaga 1). Frågornas karaktär har givit respondenten möjlighet att resonera och utvidga svaren.

Den semistrukturerade intervjuformen användes eftersom den gav intervjuaren möjlighet att få ett omfattande svar och en diskussion med respondenten. Då undersökningen handlar om hur eleverna förstår ett matematiskt begrepp, *del av*, fanns ett behov av att ta reda på hur de gick tillväga när de löste uppgifterna. Därför inriktade sig skribenterna inte på de rätta svaren utan mer på tankegången som eleverna använde sig av, när de löste uppgifterna.

4.2.3 Frågeformulär

I samband med intervjuerna fick respondenterna använda ett frågeformulär för att besvara en identisk uppsättning frågor, detta för att alla respondenter skulle få samma förutsättningar. Frågeformuläret bestod av elva frågor med fem bilder som respondenten själv fick läsa eller hjälp att läsa och tolka (för formulär se bilaga 1). Fråga 1, 2, 10 och 11 var av mer allmän art, medan frågorna 3-9 var direkt riktade på själva problemområdet, där också abstraktionsnivån på frågorna ökade efterhand.

4.3 Urval

4.3.1 Urvalsram

Undersökningen genomfördes under höstterminen 2007 i en medelstor kommun i södra Sverige. För att få fram tre slumpvist valda barnskolor till undersökningen användes kommunens hemsida. Skolorna har olika etniska upptagningsområden, en med till största del svensk bakgrund, en till största del med annan etnisk bakgrund samt en tredje skola med varierad etnisk bakgrund. Fördelningen av den etniska bakgrunden är beroende på var i kommunen undersökningen genomförs och därför kan undersökningen inte ses som representativ för alla skolor i kommunen.

4.3.2 Etiska överväganden

De etiska övervägandena är gjorda utifrån Vetenskapsrådets rekommendationer (Vetenskapsrådet [www], 2007). Kontakt togs med berörda skolor och pedagoger i förväg via telefon och mailkontakt. De elever som blev slumpvis utvalda av lärarna för att vara med i undersökningen, fick ett medgivandekontrakt med sig hem till föräldrar/vårdnadshavare för påskrift och information. Allt deltagande i undersökningen var på frivillig basis och eleverna informerades om att de kunde avstå att svara eller bryta intervjun om de så önskade. Allt insamlat material behandlas konfidentiellt och är avpersonifierat.

4.3.3 Undersökningsgrupp

Undersökningen baseras på 21 elever av olika kön och med olika etniska bakgrunder, se diagram i fig. 1. Eleverna var fördelade på år 1, 10 stycken och år 2, 11 stycken.

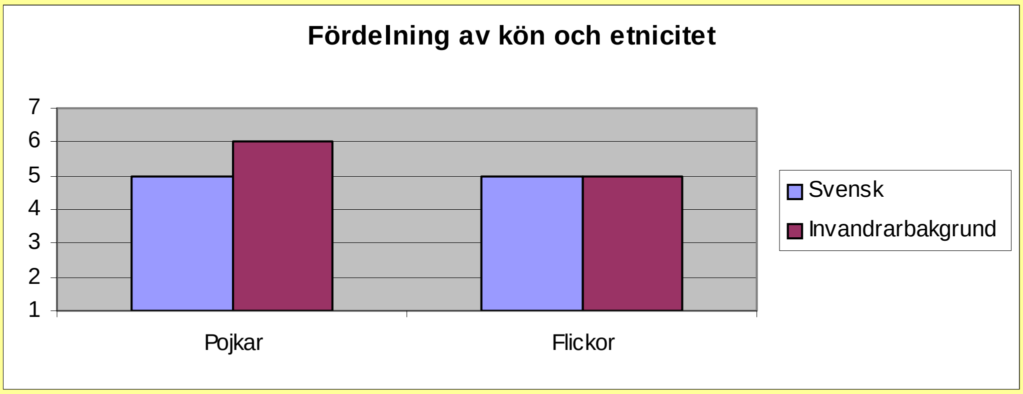


Fig. 1 Kön och etnicitet.

4.4 Genomförande

Intervjuerna genomfördes av båda skribenterna i ett avskilt rum på respektive skola i anslutning till lektionssalarna där eleverna kände sig hemmastadda. Intervjuerna gjordes en och en och alla informerades om att intervjuerna spelades in på band och om frivilligheten i deltagandet, helt enligt Vetenskapsrådets anvisningar. Respondenterna tillfrågades också om de själva ville läsa frågorna eller om de ville ha frågorna upplästa som hjälpmedel. De fick som hjälpmedel använda sig av penna, suddgummi, linjal och papper.

4.5 Tillförlitlighet

Vid en kvantitativ undersökning menar Trost (1997) att man lättare kan hänvisa till validitet och reliabilitet än vid en kvalitativ undersökning. Denna undersökning är baserad på frågeformulär med intervju och sannolikheten är stor att det skulle bli samma resultat vid ett andra försökstillfälle med andra elever. Undersökningen har god objektivitet och precision då allt som sades under intervjuerna spelades in på band samt att eleverna visade med hjälp av penna och papper hur de utförde delningen i uppgifterna. Om eleverna endast sa hur de gjorde delningen noterades det i ett intervjuprotokoll. Trost (a.a.) särskiljer också begreppet reliabilitet och delar in det i fyra komponenter:

1. Kongruens, som innebär att frågorna kan ha en stegring av svårighetsgraden men mäter samma sak. Frågorna som användes i undersökningen gick från en enkel delning av tre bananer mellan två personer till att dela 12 pennor mellan tre personer.
2. Precision, på vilket sätt svaren registreras och i detta fall användes kassettbandspelare.
3. Objektivitet, att olika skribenter tar emot och registrerar svaren på samma sätt. Svår att mäta på grund av skiftande ordkunskap hos respondenterna.
4. Konstans, beror på tidsaspekten och det är troligt att samma elever vid ett annat tillfälle skulle svara annorlunda men en ny undersökningsgrupp skulle troligen ge samma resultat.

4.6 Databearbetning

De på ljudband inspelade intervjuerna har transkriberats och bearbetats via dator. Intervjuerna och frågeformulären har bearbetats i form av tabeller och diagram.

4.7 Metodkritik

Att som undersökningsform använda sig av intervjuer är tidskrävande både när det gäller själva intervjun och utskriften av den samma, något som skribenterna fick erfara.

Denscombe (2000:34) rekommenderar att använda minst 30 stycken respondenter i en småskalig undersökning, men beroende på tidsaspekten av denna småskaliga projektforskning har ett mindre antal respondenter använts. När storleken på urvalet är mindre poängterar Denscombe att generaliseringsmöjligheten minskar

Att ha kännedom om hur utrustningen fungerade är av vikt för ett bra resultat. Detta var något som förbisågs vid användandet av bandspelaren, vilket ledde till svårigheter att höra vad som sades vid transkriberingen. Att mikrofonen hade två lägen, en för riktad upptagning och en för bredare upptagning upptäcktes inte förrän vid bearbetningen av materialet.

Beroende på oerfarenhet som intervjuare ställdes få följdfrågor på elevernas svar. Under en intervju är det inte farligt med tystnad från någon av parterna, men här var tyvärr skribenterna väl snabba emellanåt att få respondenterna att svara. Detta ledde (tyvärr) till att skribenterna ibland pratade under tiden som respondenterna försökte tänka ut hur de skulle svara.

För att lättare följa elevernas tankar och strategier hade frågeställningarna behövt utformas mer ur ett lika-/rättvisedelningsperspektiv. Att dela lika eller rättvist är något som de flesta barn är noga med i vardagslivet.

Vissa elever hade säkert också haft hjälp med att lösa uppgifterna 5-7 om de hade fått använda konkret material.

5. Redovisning av resultat

Resultaten redovisas i tabeller och diagram. I de fall, fråga 5-9, där eleverna ombads rita eller markera, fanns bilder med i frågeformuläret, som varje elev fick titta på. Under lösningsstrategierna delas elevernas svar in i antingen innehålls- eller delningsdivision, samt utifrån Huntings schema (Engström, 1997) för förståelse för del och dela av, 1; kvalitativ enhet, 2; kvantitativ enhet, 3; abstrakt enhet.

5.1 Varför och när ska man räkna

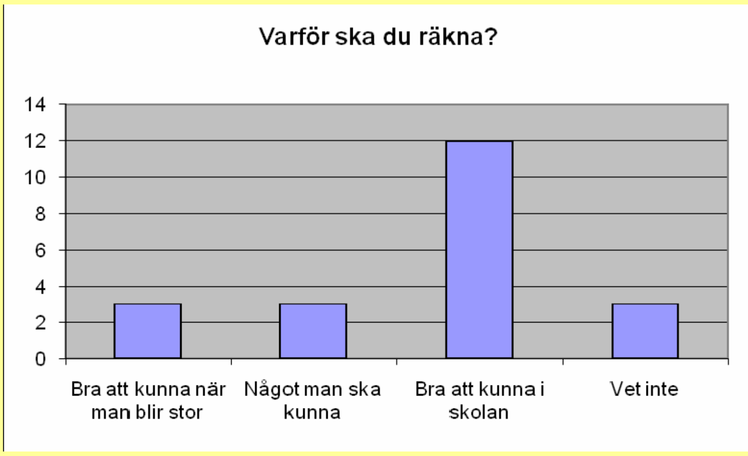


Fig. 2 Fråga 1: Varför ska du räkna?

Att räkna verkar vara något man ska lära sig och är inget man kan. Huvuddelen av eleverna upplever att räkna är något man gör för att man går i skolan och inte något man har användning av i vardagslivet (se diagram i fig. 2).

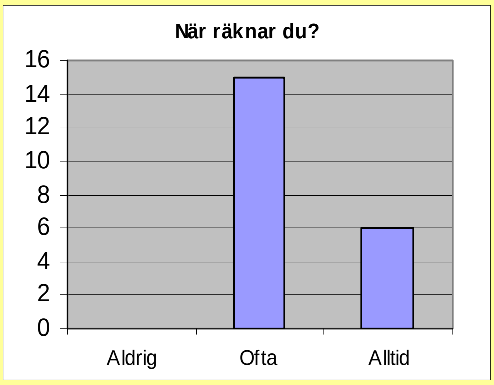


Fig. 3 Fråga 2: När räknar du?

Svarsalternativen som angavs var ”aldrig”, ”ofta” och ”alltid”, anledning till valet av alternativen var att dessa var de mest frekventa svaren i pilotundersökningen. Som diagrammet visar anser majoriteten av eleverna att de räknar ofta. Av intervjusvaren framkom det, att matematiken i skolan är den vanligaste orsaken till att eleverna räknar. Men de gav även exempel på att de räknade fåglar och bilar (se diagram i fig. 3).

5.2 Allmänt om del av

	Antal elever
Frukt	6
Godis	4
Penna	3
Tal/siffror	3
Hälften/ dubbelt	1
Kakor	1
Kött	1
Leksaker	1
Olika grejor	1
Pengar	1
Säng	1
Vet inte	1

Fig. 4 Fråga 3: Vad brukar du dela?

I denna fråga kom eleverna med flera olika svarsförslag som redovisas i tabellen i fig. 4, därav avvikelsen i antalet svar. Det eleverna främst tänkte på kring den här frågan var att dela med sig till andra. Här var godis och frukt det absolut vanligaste.

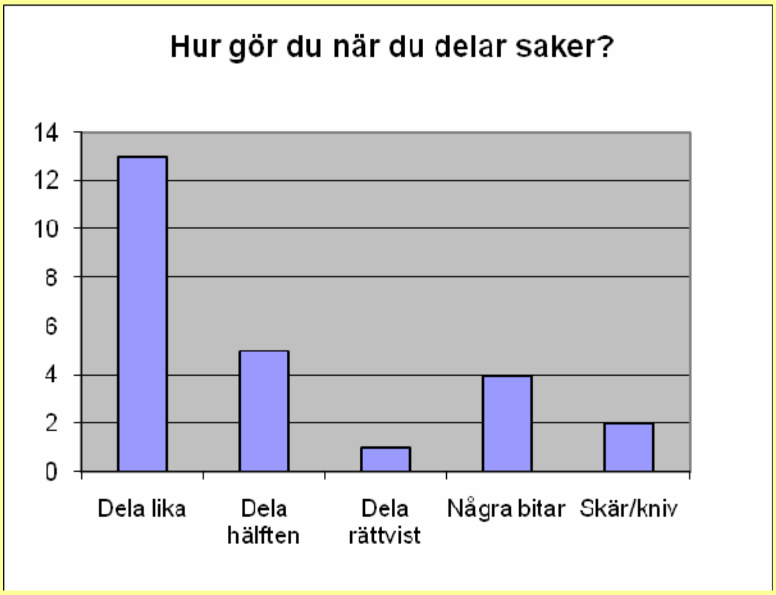


Fig. 5 Fråga 4: Hur gör du när du delar saker?

Antalet svar i diagrammet beror på att vissa elever gav mer än ett svarsförslag. Ur intervjuerna kunde man utläsa att när den här frågan kom upp till diskussion poängterade eleverna att dela lika eller rättvist var viktigt. Men det fanns tillfällen då man lät andra ta så många godisbitar de ville eller att den andre bara fick ett fåtal bitar. Detta berodde på om man hade mycket eller lite godis att tillgå eller var många eller få som skulle dela (se diagram i fig. 5).

5.3 Bananer – att dela på hälften

5.3.1 Resultat

Frågeställningen här är: Du får hälften av bananerna. På en bild visades tre bananer som eleverna skulle dela. Elva av eleverna förstod frågan och kunde se att man fick 1½ banan. För dem innebar frågan inte några svårigheter. Tyvärr var det inte alla som ritade hur de gjorde utan bara sa det.

Eleven tar	Antal elever
1	4
1 ½	11
2	5
Annat	1

Fig. 6 Fråga 5: Du får hälften av bananerna

De elever som tog en respektive två bananer tog en del av bananerna. Svaret "annat" innebär att eleven inte kunde ge något entydigt svar och förstod troligtvis inte frågan (se tabell i fig. 6).

5.3.2 Lösningsstrategier

Ingen av eleverna använde sig av innehållsdivision i den här frågan, däremot använde 19 stycken elever sig av delningsdivision. Tio elever använde sig av kvalitativ delning, medan övriga använde sig av kvantitativ delning. Endast åtta stycken visade på sin lösning genom att rita.

5.4 Äpple – att dela på tre

5.4.1 Resultat

	Antal elever
Jag får 2	20
Jag får 3	1

Fig. 7 Fråga 6: Ni är tre som ska dela på äpplena.

Frågeställningen här är: Ni är tre som ska dela på äpplena. Hur många får du? På en bild visades sex äpplen. Bilden verkar ha gett eleverna ett tydligt delningsmönster, då de inte hade några större problem att dela upp äpplena. Den som svarat tre äpplen verkade inte vara helt klar över vad som menades med att dela på tre (se tabell i fig. 7).

5.4.2 Lösningsstrategier

Ingen av eleverna använde sig av innehållsdivision, däremot använde 20 elever sig av delningsdivision. En elev använde sig av kvalitativ delning, medan övriga elever använde sig av kvantitativ delning. Det verkar som de flesta eleverna använder sitt mönsterseende.

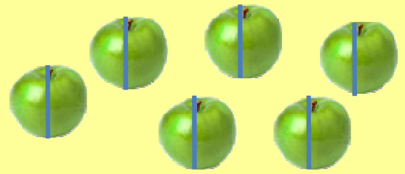


Bild 1. En av lösningsstrategierna. I intervjun säger eleven: ”Två halva till dig, två halva till dig och två halva till mig.” samtidigt som eleven pekar på två äpplen åt gången.

5.5 Pennor – att dela i tredjedelar

5.5.1 Resultat

	Antal elever
Jag får 2	1
Jag får 3	4
Jag får 4	11
Jag får 5	1
Jag får 6	1
Annat	3

Fig. 8 Hur många är 1/3 av tolv pennor?

Frågeställningen här är: Hur många pennor är två tredjedelar av tolv pennor? Frågan upplevdes som svår av flertalet elever och uttrycket tredjedelar var obekant för eleverna. För att kunna besvara frågan fick eleverna först räkna ut hur många pennor de själva skulle få om de var tre som skulle dela. Detta klarade eleverna enligt tabellen i fig. 8. Även här verkar mönsterseendet vara avgörande för att lösa uppgiften för flertalet av eleverna. En elev grupperade pennorna två och två och uttryckte detta som ett par. Detta framkom efter det att eleven markerat rätt antal på bilden. Abstraktionsnivån i frågeställningen verkade ligga på för högt plan för eleverna. De elever som placerats under ”annat” har inte kunnat ge något entydigt svar av hur många pennor de fick.

	Antal elever
Klarat	7
Klarat ej	14

Fig.9 Hur många är 2/3 av tolv pennor

När frågan återkom till hur många pennor två tredjedelar av tolv var, blev frågan åter för abstrakt och eleverna delade pennorna i två hälfter. Hur många som klarade uppgiften redovisas i tabellen i fig.9.

I diagrammet (fig.10) visas hur många som har ritat på bilden för att få hjälp med uppgiften. Endast 1/3 av eleverna klarade uppgiften och av dessa var det bara två stycken som hade ritat rätt, medan fyra stycken som klarade frågan inte hade ritat alls på bilden.

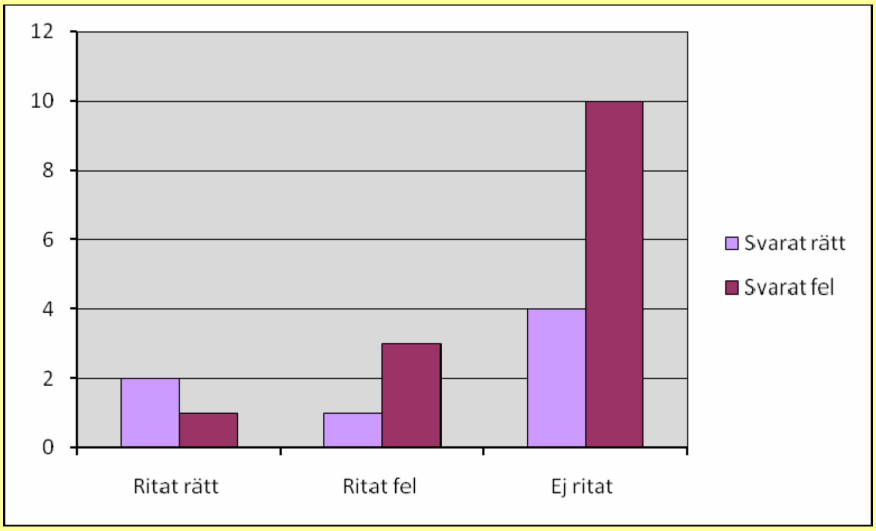


Fig. 10 Att rita två tredjedelar.

5.5.2 Lösningsstrategier

Två av eleverna använde sig av innehållsdivision, medan 16 elever använde sig av delningsdivision, tre elever svarade på annat vis. Nio elever använde sig av kvalitativ delning, medan tio elever använde sig av kvantitativ delning, två förstod inte frågan. Endast fem stycken kunde se mönster bland pennorna.

5.6 Dela strecket i tre delar

5.6.1 Resultat

	Antal elever
Två delar	2
Tre delar	11
Fyra delar	7
Annat	1

Fig. 11 Fråga 8: Dela strecket i tre delar

Frågeställningen i den här uppgiften var: Dela strecket i tre delar. På frågeformuläret var det ett 10 centimeter långt streck som eleverna skulle dela. De elever som har delat strecket i fyra delar har troligen gjort en begreppsblandning av tre delar och tre streck. Åtta av elva elever delade upp strecket i korrekta tredjedelar (se tabell i fig. 11).

5.6.2 Lösningsstrategier

Här var det svårt att se en tydlig divisionsstrategi, endast tre elever använde sig av en uttalad delningsdivision, övriga kunde inte identifieras. Elva elever använde sig av kvalitativ delning, medan nio elever använde sig av kvantitativ delning, en elev kunde inte se hur indelningen skulle gå till, se bild 2.

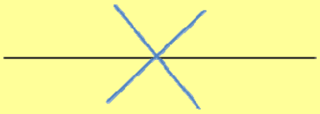


Bild 2. En av lösningsstrategierna. I intervjun frågar eleven om man kan rita så här, och drar två lodräta streck på rätt ställe i luften, men ritar istället så här.

5.7 Dela cirkeln i tre delar

5.7.1 Resultat

	Antal elever
Tre delar	13
Fyra delar	3
Annat	5

Fig. 12 Fråga 9: Dela cirkeln i tre delar.

Frågeställningen i den här uppgiften var: Dela cirkeln i tre delar. Merparten av eleverna klarade uppgiften, men det var bara en elev som delade cirkeln i tydliga tredjedelar. De som är placerade under alternativet ”annat” har delat cirkeln på andra sätt (se tabell i fig. 12).

5.7.2 Lösningsstrategier

Här var det svårt att se en tydlig delningsstrategi, endast en elev använde sig av en uttalad delningsdivision, övriga kunde inte identifieras. 18 elever använde sig av kvalitativ delning, medan en elev använde sig av kvantitativ delning, två elever kunde inte se hur indelningen skulle gå till.

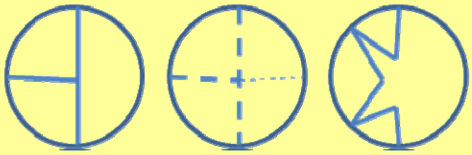


Bild 3. Bilden till vänster visar den vanligaste delningen av cirkeln, medan det även förekom andra lösningar. Elevbilden i mitten visar hur en elev börjar rita, men ser inte att det korta strecket kan stanna vid centrum av cirkeln och överger därför den strategin. Eleven menar på att det blir fyra delar. Vid tipset att cirkeln kan vara en tårta ritar hon ”stjärnan” med motiveringen: ”…då blir det tre och halva tårtan över.”

5.8 När tror du mamma, pappa och läraren räknar

Enligt eleverna räknar föräldrarna när de ska handla, ha gäster, hjälpa dem med läxorna eller själva går i skolan. Läraren räknar inte speciellt ofta men gör det när han/hon är i skolan och har undervisning samt enligt någon elev mellan klockan 18 och 19 och ibland på loven. Men annars verkar inte föräldrar eller lärare använda sig av eller ha nytta av att räkna enligt eleverna. Dessa frågor kommer inte att behandlas i diskussion eftersom frågorna inte tillför vår undersökning några relevanta fakta, utan var mer avsedda att runda av intervjuerna.

6. Diskussion

I det här kapitlet kommer vi att diskutera det vi undersökt och sätta in det i ett vetenskapligt sammanhang. Vi kommer att utgå från den litteratur vi läst och som omnämns i vår forskningsbakgrund.

Att elevernas tänkande och handlande är en följd av deras tidigare erfarenheter och den kontext de befinner sig i var något som vi blev varse. Det är också något som Ahlberg (1995) m.fl. tar upp i sin forskning. Några av eleverna verkade bitvis ha tillägnat sig ett allt för dåligt ordförråd, speciellt när det gällde ord som inte direkt hör till deras vardag, eller hade de språksvårigheter av annat slag. Detta gjorde att vi som intervjuare fick omformulera och förklara ord och meningar för eleverna. Men i vissa fall hjälpte inte detta utan eleven hade ett så pass fattigt ordförråd att hela situationen blev övermäktig. När intervjun inte handlade om direkt matematik hade dessa elever det oftast lättare då de kunde använda sig av sina ”vanliga” ord som de använde i andra sammanhang.

6.1 Varför ska man räkna

På frågan varför de ska räkna svarade många elever att det gör man för man går i skolan. Det var få som upplevde att de hade någon användning av det i sin vardag. Att barn lär sig matematik automatiskt i vardagssituationer och till exempelvis får antalsuppfattning när de är med och dukar är ingen självklarhet. Naturligtvis är det möjligt men om inte barnet blir uppmärksammat på de matematiska begreppen utvecklas det ingen förståelse för dem (Doverberg, 1999). Vilka matematiska kunskaper som behövs för att stiga upp på morgonen, ordna frukost och komma iväg i tid till skolan, kan vara exempel eleverna behöver uppmärksammas på, även om det är något som de känner till och är bekanta med. Att detta är ”riktig matematik” är väsentligt att barnen blir medvetna om (Olsson, Doverberg, Forsbäck & Trygg, 2003). Matematik är ett verktyg, inte bara matematiker använder matematik utan alla använder det i sitt dagliga liv. Om vuxna synliggör vad som finns bakom matematikens symboler, förstår barnen varför de ska lära sig matematik. Inte bara för att de ska lära sig räkna och tänka på ett visst sätt utan att de får hjälp med att utveckla kunskaper som ger dem självförtroende både i vardagslivet och i framtiden (Reys et al., 2006:3; Claesson, 2002:27). Vi fann i vår undersökning att eleverna ser skolbokens matematik som den riktiga, den matematik de använder i vardagen verkar osynlig och något de gör automatiskt. Det som

Høines (1997) varnade för med två begreppsvärldar, en för skolan och en för vardagen, verkar vara besannad.

6.2 Formell och informell matematik

Långt innan eleverna börjar grundskolan, kommer de i kontakt med matematik. Redan i spädbarnsåldern och hela förskoleperioden tar de till sig begrepp och missuppfattningar. Under uppväxten möter elever många situationer, där de lär sig olika fenomen om tal. Erfarenheterna kan bestå av att dela kakor eller godis med någon och lägger märke till att den andre får mer (National Research Council, 2001). Doverberg (1999) menar på att barn erövrar matematiken genom ständigt pågående interaktioner mellan pedagoger och barn som är eller blir intresserade när de väl upptäcker dem. Ur våra elevers svarsförslag tolkar vi det som att dela med sig eller dela lika är något som de har erfarenhet av. Doverberg (a.a.) ser den informella matematiska kunskapen utifrån Ginsburgs modell med tre kategorier. Där 1; informell och naturlig kunskap anses vara universell, till exempel vilka metoder barnen använder för att dela rättvist. I elevernas svarsförslag märks tydligt, att det är viktigt med en rättvis uppdelning av vad som än ska delas. 19 elever poängterade detta i fråga 4. För att få en lika delning använde de ofta ett-till-ett-perspektivet, vilket kan liknas vid en kvantitativ delning. Det fanns även elevsvar som visar på en kvalitativ delning, att till exempel lillasyster får men att hon inte får lika mycket. 2; informell och kulturell kunskap, vilken formas utanför skolan, som till exempel våra räkneord. 3; formell och kulturell kunskap där skolan står för en mediering av kunskapen. I undersökningen kan man utläsa att en del elever redan har skolifierats, deras svar handlade om tal, siffror och hälften – dubbelt.

Undersökningen genomfördes under lektionstid och i nära anslutning till fruktraster. Därför kan man anta att elevernas svar var präglat av detta. Det verkar, om man ser till svarsfrekvensen, som om eleverna har ett kontextbundet tänkande. I bland annat två elevsvar hör delning ihop med användning av kniv för att dela.

6.3 Att dela på hälften

Vilken erfarenhet har eleverna av begreppet del av? Är den kontextbunden eller är den dekontextualiserad? Här fick eleverna tre bananer, som de fick dela på. Elevernas lösningar visade på att cirka hälften kan se att man får en hel banan och att man måste dela en för att få den efterfrågade mängden, 1½ - det vill säga de gör en kvantitativ delning. Det verkade vara ett bekant matematiskt problem för dem där många använder sina intuitiva kunskaper av delning. Dessa elever har använt sig av en generaliserad kunskap kring begreppet del av. Detta visar på att de gjort sin kunskap till en integrerad del av sin begreppsvärld, att de har detextualiserat begreppet del av.

I denna uppgift gick det att använda både delnings- och innehållsdivision, men flertalet valde delningsdivision som både i undersökningen och enligt Kronqvist (1993) är den vanligast förekommande varianten. Elva elever utförde delningen korrekt med en kvantitativ delning. Tio elever utförde en kvalitativ delning där de delade mängden bananer i olika stora delar, varav en som benämns annat i resultatdelen inte kunde komma fram till ett entydigt svar men använde sig ändå av en kvalitativ uppdelning i sina försök att lösa uppgiften.

6.4 Att dela på tre

Denna fråga beredde inte många elever några problem, det matematiska sambandet verkade bekanta. Kronqvist (1993) menar, för att medvetandegöra de intuitiva kunskaperna är vägen över redan bekanta matematiska samband en bra inkörsport.

Även här använde sig eleverna av delningsdivision. Alla utom en elev använde sig av kvantitativ delning, det vill säga att de delade äpplena i tre grupper med två i varje. Tre elever fick tänka efter för att se hur många äpplen de skulle få, medan övriga 17 elever kunde se ett mönster direkt, de har utvecklat ett mönsterseende, eller ett så kallat ”subitizing” som härstammar från det latinska ordet subitus som översätts med *plötslig*, eller *med ens* (Reys et al., 2006). Reys et al. (2006) menar på att det är en väsentlig kunskap att tillgodogöra sig denna kunskap tidigt. Det underlättar att känna igen grupperingar av antal i stället för att räkna dem en och en. Likaledes förekom brister i ordkunskap och ordförråd vilket ledde till att en elev inte förstod frågan att dela på tre och en annan elev inte hade ett tillräckligt ordförråd att uttrycka sig med, ”Två halva till dig, två halva till dig och två halva till mig.” samtidigt som eleven pekar på två äpplen åt gången. Ahlberg (2001) anser att när eleven samspelar med omvärlden förbättras deras förståelse av matematiska begrepp, helt i överensstämmelse med Vygotskys teori om utvecklingszon.

6.5 Att dela i tredjedelar

Eleverna upplevde denna fråga som svårast och den frågan som de behövde mest hjälp med. Svårighetsgraden på frågorna hade gradvis stegrats från fråga fem. Vad en tredjedel betydde visste inte eleverna, därför fick vi förklara uttrycket som att tredjedelar är det samma som när tre ska dela på någonting. För att reda ut frågeställningen – hur många är två tredjedelar av tolv pennor – fick eleverna först reda ut hur många pennor en person skulle få, som är lika med 1/3, skulle få. Elva elever klurade ut att det skulle bli fyra pennor till varje person, medan sju elever gjorde en annan indelning. För tre elever var frågeställning alltför svår och de kunde inte komma fram till något svar. För att inte dessa elever ska tappa självförtroendet är det viktigt att läraren enligt Ahlberg (2000) försöker anpassa undervisningen så att de får en möjlighet att lyckas. Genom detta formas en brygga i undervisningssituationen när läraren tar reda på hur eleven uppfattar uppgifterna och de matematiska symbolerna. Även i denna fråga verkade elevernas mönsterseende spela en avgörande roll i tolkningen av bilden, även ett-till-ett-delning förekom. Det fanns också varianterna där eleverna har ritat rätt men svarat fel, ritat fel men svarat rätt och svarat rätt utan att rita. Man måste nog här ta hänsyn till att elevernas tänkande och handlande är en följd av deras tidigare erfarenheter och den kontext de befinner sig i. Innan matematikundervisningens mål slagit rot med att bringa förståelse av de matematiska strukturerna och relationerna kan det vara svårt att skriva ner det man intuitivt förstår.

När eleverna hade rett ut hur många pennor varje person fick återgick vi till huvudfrågan där vi frågade hur många pennor två personer får av dessa tolv pennor. Att hålla fast vid hur många pennor en person fick hade eleverna svårt att överföra till hur många pennor två personer skulle få. Detta gjorde att några gick tillbaka och delade pennorna i två hälfter. Hälften av eleverna klarade ut att se 1/3 men endast 1/3 klarade av att se 2/3.

En elev visade prov på ett eget tänkande, som det tog tid för oss att förstå. Eleven grupperade pennorna i par, så när eleven räknade ut hur många pennor en person skulle få svarade eleven 2 stycken men på bilden hade eleven markerat fyra stycken. Detta reagerade vi på. Varför vi frågade hur eleven hade tänkt. Under samtalet förstod vi att eleven delade upp varje tredjedel i två delar, så därför svarade hon att varje person fick två var. På frågan hur mycket är två tredjedelar svarade hon ”två från samma sida” och följdenligt menade eleven fyra delar, det vill säga åtta pennor. För att förstå mer abstrakta matematiska begrepp behöver barn ha nått en tillräcklig nivå i utvecklingen både fysiskt och psykiskt (Reys et al., 2006). Mycket av förståelsen av matematikundervisningen handlar om den språkliga kapaciteten av att förstå de matematiska symbolerna och uttrycken (Ahlberg, 2001).

6.6 Att dela in

Att dela in ett lodrätt streck eller en cirkel i tre delar innebar att eleverna själva skulle skapa indelningar. Detta kräver en abstraktionsförmåga som inte alla elever behärskar. Reys et al. (2006) definierar matematik som en studie av mönster och relationer som eleverna behöver bli medvetna om. De behöver bli uppmärksammade på hur en idé är lik eller olik idéer som de redan kan. Av 21 elever var det åtta som klarade av båda uppgifterna med att dela in strecket och cirkeln i tre delar. Två elever klarade fråga åtta men gjorde fel på fråga nio. En möjlig förklaring kan vara att trötthet kan ha infunnit sig, för båda eleverna satt och funderade länge men gav upp efter ett tag. Fem elever klarade fråga nio men inte fråga åtta. Att det är fler som klarar denna fråga kan bero på elevernas erfarenheter av delning i hälfter, till exempel fruktdelning i halvor och fjärdedelar. Det vanligaste delningsmönstret av cirkeln var att dela in cirkeln i två halvor och sedan delade en halva i två delar, se bild 4. Malmer (2002) har i undersökningar träffat på många barn som känner till hälften var och även en fjärdedel men det har varit sämre beställt med tredjedelar. Av de eleverna som inte klarade uppgiften framgick det inte heller under samtalet med dem eller av markeringarna på bilderna hur de tänkte.

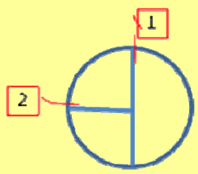


Bild 4. Bilden visar hur de flesta eleverna gjorde delningen av cirkeln

6.7 Slutdiskussion

Vi ansåg innan undersökningen och vi anser fortfarande att alla elevers möjligheter att lära underlättas om undervisningen utgår från barnets tidigare erfarenheter. Vi ville med denna undersökning ta reda på hur elevernas egna erfarenheter inverkar på förståelsen av problemställningar kring *del av*. Det vore att förhäva sig att säga att vår undersökning utvecklar eller förbättrar matematikundervisningen men den visar ändå på att elevernas erfarenhet av vardagsmatematik har betydelse för deras förståelse av begreppet del av. Skolan är en miljö där elever kommer i kontakt med kulturella erfarenheter, kunskaper, insikter och färdigheter, som man inte möter på andra ställen i samhället eller i sin vardag (Säljö, 2005). I interaktion med läraren socialiseras eleverna in i mattespråket för att tillsammans få en gemensam grund att stå på. Elever har innan skolstart skaffat sig erfarenheter som har med matematik att göra även om de inte är medvetna om det. Skolan och vardagslivet skiljer sig åt socialt. Detta leder till att elever behandlar matematik på ett sätt i skolan och på ett annat sätt i vardagslivet. När barns erfarenheter och informella lösningsmetoder skiljer sig från undervisningen, finns det stor risk att eleverna blir blockerade och det i sin tur hämmar deras kreativitet och upptäckarglädje. Det är därför viktigt att lyssna till eleverna och försöka tolka vad de säger och menar, så att vi kan få reda på vad de kan och vilka erfarenheter de har med sig till skolan. Det gör vi för att de skall känna, att den kunskap som de har med sig spelar en stor roll i undervisningen. Är det något vi skall lägga oss vinn om att göra för dem, är det att hjälpa dem i att vidareutveckla erfarenheter och kunskaper som de redan har. Annars riskerar de att få två begreppsvärldar, en för skolan och en för fritiden. Vilket vi med de inledande frågorna fick bekräftat och något som Høines (1997) varnat för.

Statens offentliga utredning (SOU) skriver i sitt betänkande, *Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens* (2004)

> Att lära sig är ett livslångt projekt som börjar redan med spädbarnets lek och prövanden. Barnet upplever och tar snart till sig former, antal, ordning, samband, symmetrier och mönster och mycket tidigt uppstår intuitiva föreställningar om många grundläggande matematiska begrepp. Så småningom kommer barnets och den unga människans informella språk och föreställningar att möta den formella matematiska kultur som redan finns etablerad i skola och högskola. Att ta sig an och berika detta möte är en av läraryrkets svåraste och mest stimulerande uppgifter. Hur ska matematikens formella språk och välordnade teorier kunna möta och förstärka barnets intuition, nyfikenhet, lust och upptäckarglädje? Mycket talar också för att ungdomar har olika sätt att lära, […] Lärare har här en nyckelroll när det gäller att förstå och vidga gränserna för elevernas matematiska tänkande.
>
> (SOU 2004:97, ss, 87-88 [www])

När vi genomförde vår undersökning, var kännedomen om att dela upp, så att alla får lika mycket var, något eleverna kände igen. Det är en problematik som de tidigt kommer i kontakt med. Den var också något som förekom som inslag i deras skolvardag. Under fruktrasten delades det ut halva och hela frukter. Läraren frågade dem om de ville ha en hel frukt eller en halv. Om de ville ha en halva, delade läraren frukten med en kniv. En del var så inne i sitt vardagstänkande att de inte kunde släppa det de nyss varit med om utan fortsatte med det i svaren, delning innebär att man använder kniv. När de kom till att dela upp ett jämnt antal äpplen och pennor kunde eleverna spontant dela upp dessa i två lika stora delar, dvs. de gjorde en kvantitativ delning. Men när antalet objekt var ojämnt var det tio elever som inte kunde dela upp i lika stor delar, dvs. de gjorde en kvalitativ delning. Det kan säkert ha många olika orsaker, men det vi tror detta var ett uttryck för är att eleverna i den här åldern uppvisar en stor skillnad i sin utveckling, något som Claesdotter (red., 2002) också tar upp.

Lärandet enligt Vygotskys sociokulturella perspektiv är att det är situationsbundet, det växer fram i sociala gemenskaper. Med andra ord hur individen uppfattar situationen, till exempel när eleverna fick välja om de ville ha hela eller halva frukter, vilka erfarenheter hon gör, man använder kniv när man delar frukt, och hur hon skapar mening med det hon är med om, är säkert tankar om delning de tog med sig till intervjun. Att dela bildens sex äpplen i tre delar verkade de flesta eleverna vara bekanta med. De såg mönstret i bilden och delade in äpplena två och två. Om det var ett resultat av deras ”subitizing” är svårt att sia om. Men att de använde sig av sitt vardagstänkande i frågan är vi övertygade om, situationen föll sig naturligt. Det förekom också elever som associerade delning med att dela i hälfter i undersökningen. Där hade en form av skolifiering ägt rum.

Först när begreppsunderlaget finns etablerat hos eleverna kan vi utveckla deras mattespråk (Høines, 1997). När vi frågade respondenterna om de visste vad 1/3 var, var det ingen som visste det. Med tanke på det åldersspant vi intervjuade var det inte konstigt, spridningen i mognaden hos dessa elever kan variera mellan 1 och 3 år. När vi förklarat begreppet 1/3 kunde ändå 11 elever räkna ut att varje tredjedel bestod av fyra pennor, de kunde omsätta sina egna tankar om delning, när de fick hjälp av en vuxen. När de sedan skulle räkna ut hur många pennor 2/3 var, blev abstraktionsnivån på begreppsuttrycket för svårt för flertalet respondenter. Det tyder på det Vygotsky (1971) anser, att språket inte är ett resultat av begreppsutvecklingen, utan är en del av själva begreppet. Han säger också att språk och tanke utvecklar sig dialektiskt och beskriver begreppsuttrycket som språk i vid mening och allt uttryck för tanken, talat språk, tecken och kroppsspråk (Høines, 1997:68).

När eleverna skulle dela in streck och cirklar i tredjedelar kunde vi lägga märke till att många fick svårt med begreppsuttrycket, att *dela in* ett streck i tre delar var kanske inte det bästa ordvalet. Det hade kanske varit bättre med att säga att de skulle ha *delat upp* ett streck i stället. När det gällde cirkeln vet vi inte om det var begreppsuttrycket som var svårigheten, det var nog snarare det att de inte var bekanta med frågeställningen.

Undervisningen i skolan lutar sig gärna mot att det finns ett givet innehåll som genom lärarens försorg skall förmedlas till eleven. Att undervisningen ska ske med utgångspunkt i elevernas erfarenheter har i decennier framhållits, det har även lyfts fram i styrdokumenten för skolan. Vårt syfte med arbetet att undersöka hur yngre elever spontant använder sig av sitt informella kunnande när de löser matematiska uppgifter. Detta intresserade pedagoger redan under förra sekelskiftet, då man kom fram till att det informella kunnandet hade stor betydelse för elevernas kunskapsinlärning. Trots den intensifierade forskningen på 1970-talet, då sekelskiftstankarna fick en renässans, när det gäller den generella logiken i det matematiska kunnandet. Enligt forskningslitteratur har det tydligen inte påverkat matematikundervisningen fram till idag, när det gäller hur individer på olika sätt bygger upp ett individuellt kunnande och hur de förhåller sig till matematiklogiken. Under skrivandets gång har vi många gånger ställt oss frågan varför dessa forskarrön inte tagits ab notam och genomsyrat skolans sätt att undervisa. Det verkar av vad vi kan förstå, som om skolans undervisningstradition väger tyngre än den empiriska forskningen.

Det många forskare är övertygade om och vår undersökning visat på är att elevers erfarenheter av vardagsmatematik har betydelse för deras förståelse av matematiken. För att elever ska lyckas med sitt lärande behöver läraren ta till vara varje elevs erfarenheter och därifrån utveckla deras kunskaper. Att didaktiken ligger hos läraren och är knuten till lärarens tänkande om hur elever utvecklar sin matematik är vi överens med Engström (1997) om. Att se varje elev som styrdokumenten förordar och säkert varje lärare strävar efter, tror vi, är omöjligt och faller på sin egen orimlighet om klasserna består av 30 elever. För när och hur ska läraren hinna se varje enskild elev och få tid till att ta reda vad han/hon har i sitt bagage. I den litteratur som vi har läst är det ingen som tar upp hur vi skall kunna förverkliga de pedagogiska och didaktiska framsteg som forskats fram. Är man inte intresserad av att forskningen kommer eleverna till del?

6.8 Svar på förväntningarna

Man slutar aldrig att förvånas vad elever har med sig i sitt bagage, att en elev skulle dela in en cirkel i perfekta tredjedelar hade vi inte förväntat oss. Men att de var kontextbundna framkom klart i svaren. Våra förväntningar på deras rättvisepatos fick vi inte helt bekräftat. En elev berättade att om han hade en påse med godis brukade han ta en bit själv för att sedan bjuda sina kamrater på resten, något som hans mamma inte tyckte var så bra.

7 Sammanfattning

Både internationellt och nationellt finns det idag kritik mot elevers kunskaper i matematik, man menar på att många elever inte förstår matematikundervisningen. För barn är matematiken sammanbunden med den sociala kontext de lever i och flera studier visar på att barn kan mycket kring matematik innan de får någon reell undervisning. Vi ställde oss frågan om de kunde se relationen, eller med andra ord kunde använda sig av sitt eget tänkande för problemlösning i skolan.

I litteraturen beskriver olika författare begreppsbildning och hur den utvecklas. Mycket av förståelsen i matematikundervisningen handlar om den språkliga kapaciteten av att förstå de matematiska symbolerna. När barn erfar utvecklas de och ser samband (Ahlberg, 2001). Ahlberg (a.a.) beskriver det som att sätta ord på det man ser och gör i vardagen leder till att man synliggör det man håller på med. Olsson och sin sida (i Claesdotter, 2002:30) liknar det vid att språket blir vår ”mentala tumme”, för om barn äger ett språk kan de också utveckla matematiska begrepp.

Syftet med vår undersökning var att ta reda på hur de explicit använder sina egna erfarenheter och om dessa erfarenheter underlättade problemlösningen och hur yngre elever förstår begreppet del av. Som metod använde vi frågeformulär med samtal. Vi har gjort vår undersökning på tre skolor där 21 elever i ålder 6-8 år med olika etniska bakgrunder medverkat.

Eleverna ser i huvudsak matematik som ett skolämne och inget som de har nytta av i sin vardag. Men vår undersökning visade på att eleverna använder sig av sina informella kunskaper när de löste uppgifterna i frågeformuläret. Eleverna associerar begreppet del av med att dela lika eller i hälfter, oavsett vad som efterfrågades.

Vi ansåg innan och anser fortfarande att alla elevers möjligheter att lära underlättas om undervisningen utgår från barnets tidigare erfarenheter. Genom svaren på de inledande frågorna styrktes det som Høines (1997) varnat för, att eleverna rör sig i två begreppsvärldar, en för skolan och en för fritiden.

8 Fortsatt forskning

Fortsatta forskningsfrågor utifrån arbetet kan handla om:

- Hur fast sitter den matematiska undervisningstraditionen i skolan?
- Varför förändras inte den matematiska undervisningen?

Detta då inte undervisningen har utvecklats speciellt mycket under de senaste decennierna.

- Varför har eleverna svårare att se hur de ska dela lika när antalet objekt är ojämnt?
- Hur har dessa elever tänkt när frågeställning handlar om att dela in ett objekt i tre delar? En fortsatt forskning kring dessa elevsvar skulle vara intressant.

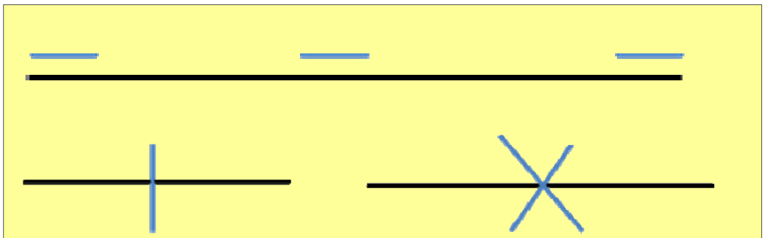


Bild 5.

Referenser

Ahlberg, A. (1995) *Barn och matematik*. Studentlitteratur: Lund.

Ahlberg, A. (2000) Att se utvecklingsmöjligheter i barns lärande. I Wallby, K. et al.. (red) NCM, Göteborgs universitet (2000) *Matematik från början* (ss. 9-98). NCM/Nämnaren, Göteborgs universitet.

Ahlberg, A. (2001) *Lärande och delaktighet*. Studentlitteratur: Lund.

Bergius, B. & Emanuelsson, G. (2000) Att stimulera barns intresse för och upptäckter i matematik. I Wallby, K. et al.. (red) NCM, Göteborgs universitet (2000) *Matematik från början* (ss.145-178). NCM/Nämnaren, Göteborgs universitet.

Claesdotter, A. (2002) Matematik finns i vardagen. I *Matematik, teknik och naturvetenskap - teori och praktik i förskolan. Nr 4 Temaserie från tidningen Förskolan.* Lärarförbundets förlag

Denscombe, M. (2000) *Forskningshandboken – för småskaliga forskningsprojekt inom samhällsvetenskaperna*. Studentlitteratur: Lund.

Doverborg, E. & Samuelsson Pramling, I. (1999) *Förskolebarn i matematikens värld*. (Red.) Berit Almer. Liber AB: Stockholm.

Dysthe, O. (1996) *Det flerstämmiga klassrummet.* Lund: Studentlitteratur.

Emanuelsson, G. et al. (red) NCM, Göteborgs universitet (1996) *Matematik – ett kommunikationsämne*. NCM/Nämnaren, Göteborgs universitet.

Empson, S. B. et al. (2006) Fractions as the coordination of multiplicatively related quantities: A cross-sectional study of children´s thinking. In Dreyfus, T. (ed.) *Educational Studies In Mathematics – An Internatiional Journal* (ss. 1-28). Springer: Nederländerna.

Engström, A. (1997), *Reflektivt tänkande i matematik – om elevers konstruktioner av bråk.* Almqvist & Wiksell International: Stockholm.

Eriksson, K-H, Om barns förmåga att bilda begrepp. I Wallby, K. et al. (red) NCM, Göteborgs universitet (2000) *Matematik – ett kommunikationsämne* (ss. 54-58). NCM/Nämnaren, Göteborgs universitet.

Høines Johnsen, M. (1997) *Matematik som språk – verksamhetsteoretiska perspektiv*. Övers. Mikael Mörling. Liber Förlag: Malmö.

Katz, V. J., (1998) *A History of Mathematics – an introduction.* 2 uppl. Addison Wesly Longman: USA.

Kronqvist, K-Å. & Malmer, G. (1993) *Räkna med barn*. Ekelunds Förlag AB: Solna.

Malmer, G. (2002) *Bra matematik för alla – nödvändig för elever med inlärningssvårigheter*. Studentlitteratur: Lund.

Maunula, T. (1996) *Matematik – hur lär man sig det?* Göteborgs Universitet: Mölndal.

National Research Council (2001) *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, D.C.: National Academy Press

Neuman, D. (1989) *Räknefärdighetens rötter*. Liber: Stockholm.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V. & Smith N. L. (2006) *Helping Children Learn Mathematics*. 8 uppl. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Solem Heiberg, I. & Reikerås Lie, K. E. (2004) *Det matematiska barnet*. Natur och kultur: Stockholm.

Säljö, R. (2005) *Lärande och kulturella redskap – om lärprocesser och det kollektiva minnet*. Nordstedt Akademiska förlag: Stockholm.

Unenge, J., Sandahl, A. & Wyndhamn, J. (1994) *Lära matematik*. Studentlitteratur: Lund.

Wallby, K. et al. (red) NCM, Göteborgs universitet (2000) *Matematik från början*. NCM/Nämnaren, Göteborgs universitet.

Williams, P., Sheridan, S. & Pramling Samuelsson, I. (2000) *Barns samlärande – en forskningsöversikt.* Lenanders Tryckeri AB: Kalmar.

Wistedt, I. et al. (1992) *Att vardagsanknyta matematikundervisningen – slutrapport från projektet. Vardagskunskaper och skolmatematik*. Stockholms universitet: Pedagogiska instutionen.

Wistedt, I. (1996) Matematiska samtal. I Emanuelsson, G. et al. (red) NCM, Göteborgs universitet (1996) *Matematik – ett kommunikationsämne* (ss. 65-68). NCM/Nämnaren Göteborgs universitet.

Elektroniska källor:

http://ncm.gu.se/media/laromedel/familjebroschyr/foraldrabroschyr_57.pdf 2007-11-01 kl. 18.32

http://www.vr.se/download/18.6b2f98a910b3e260ae28000360/HS_15.pdf 2007-12-05 kl. 13.46

http://se.wikipeida.org/wiki/Edward_Thorndike 2007-12-11 kl. 18.53

http://www.regeringen.se/content/1/c6/03/03/48/6a32d1c0.pdf 2007-12-28 kl. 09.34

Bilaga 1

Frågeformulär till C-uppsatsen.

1. Varför ska du räkna?

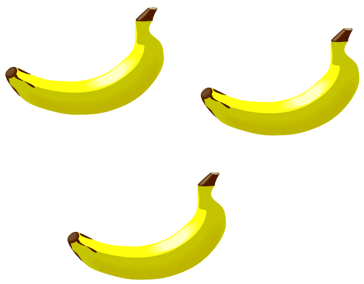
2. När räknar du?

Aldrig Ofta Alltid

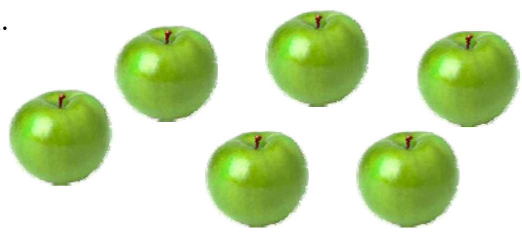
3. Vad brukar du dela?

4. Hur gör du när du delar saker?

5. Du får hälften av bananerna. Rita hur mycket du tar.
   Kommentar:
   Kan du säga eller skriva det på något annat sätt?



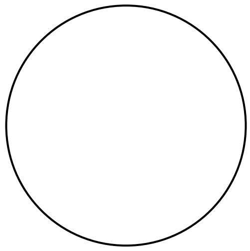
6. Ni är tre som ska dela på äpplena och du får en del.
   Hur många får du?
   Kommentar:
   Kan du säga eller skriva det på något annat sätt?



7. Hur många är två tredjedelar av tolv pennor?
   Kommentar:
   Om eleven inte kan formulerar vi om frågan som ovan.

8. Dela strecket i tre delar.
Kommentar:

9. Dela cirkeln i tre delar.
Kommentar:



10. När tror du mamma och pappa räknar?

11. När tror du läraren räknar?