HÖGSKOLAN
KRISTIANSTAD

EXAMENSARBETE

Hösten 2005

Lärarutbildningen

MULTIPLIKATIONSTABELLEN, EN DEL AV PUSSLET

Vilka är bitarna?

Författare
Almerisa Sabanovic

Handledare
Thomas Dahl

www.hkr.se

Multiplikationstabellen, en del av pusslet
Vilka är bitarna?

Abstract

Syftet med studien var att undersöka vilken eller vilka strategier gymnasieelever använder sig av vid multiplikation mellan två heltalsfaktorer. Genom både den kvalitativa och kvantitativa val av metod har jag tagit del av gymnasieelevernas tankar vid multiplikation och de samband som finns mellan multiplikationstabellen och faktorisering av ett tal. Slutsatsen av det är att eleverna har olika sätt att lära sig produkten av två heltal. Undersökningen visar att elever som har mindre kunskaper i multiplikationstabell har också svårigheterna med faktorisering av ett heltal. Eleverna har olika erfarenheter av multiplikationstabellen och har lärt sig den olika snabbt. Elevernas förståelse för multiplikation ökar då de får lära sig rätt termologi. Åttans tabell hade eleverna i undersökningen mest svårigheterna med.

Ämnesord: Multiplikationstabell, faktorisering, kombiundersökning

Förord

Inspirationen till valet av ämne hämtade jag då jag satt i ett samtal en nioåring pojke om hur han kommer ihåg produkten av två heltal. Han går i trean och i skolan hade fröken precis börjat med undervisningen av multiplikationstabellen. Min tanke är att, om eleverna börjar med multiplikationstabellen så pass tidigt i skolan borde gymnasieeleverna vara väl insatta i multiplikationstabellen och användningen av multiplikation som räknesätt. Den här uppsatsen handlar bland annat om elevernas sätt att tänka vid multiplikation av två heltals faktorer. Under min empiriska studie har jag tagit del av många intressanta svar. Arbetsgången har varit krävande men väldigt intressant.

Jag vill tacka alla som gjort detta arbete möjligt. Jag vill gärna passa på och tacka min familj och vänner som har stöttat mig under arbetets gång. Framför allt vill jag tacka min handledare på Högskolan Kristianstad, Thomas Dahl som har ställt upp för mig då det har behövts. Jag vill även tacka alla medverkande elever.

Till läsaren vill jag önska trevlig läsning samt ge en kort resumé av vad de kommande kapitlen handlar om. Kapitel 2 behandlar den teoretiska litteraturgenomgången i uppsatsen, som tar upp betydelsen av begreppsinlärning samt kunskapen i och om multiplikation. Den handlar även om förståelsen och strategierna i lärande av multiplikationstabellen. I kapitel 3 beskrivs det val av metod och genomförande av undersökningen. Kapitel 4 sammanfattar resultatet av enkäterna och intervjuerna. I kapitel 5 försöker jag besvara uppsatsens frågeställningarna samt ha en metoddiskussion. I kapitel 6 hittar du en sammanfattning av uppsatsen.

Kristianstad, december 2005

Almerisa Sabanovic

Innehållsförteckning

1 INLEDNING 6

1.1 BAKGRUND 7
1.2 SYFTE OCH PROBLEMSTÄLLNINGAR 8
1.3 RIKTLINJER FÖR UPPSATSEN 9

2 TEORETISK LITTERATURGENOMGÅNG 10

2.1 VIKTEN AV ATT KUNNA HANTERA BEGREPP OCH SYMBOLER 10
2.2 NÅGOT OM MINNET 11
2.2.1 HUR LÄGGER VI KUNSKAPEN PÅ MINNET? 11
2.3 FÖRSTÅELSEN AV MATEMATIK HOS ELEVERNA 12
2.4 VAD STÅR PROCEPT FÖR? 14
2.5 KUNSKAPEN I MULTIPLIKATION 15
2.6 HUR PÅVERKAR KUNSKAPERNA I MULTIPLIKATIONSTABELLEN ANVÄNDNINGEN AV ALGORITMER? 16
2.7 SÅ FÖRSTÅR VI MULTIPLIKATIONSTABELLEN 17
2.8 OLIKA STRATEGIER FÖR LÄRANDE AV MULTIPLIKATIONSTABELLEN 18
2.8.1 MINIRÄKNAREN 21

3 METOD 22

3.1 VAL AV METOD 22
3.2 GENOMFÖRANDE 22
3.2.1 GENOMFÖRANDE AV ENKÄTEN 23
3.2.2 GENOMFÖRANDE AV INTERVJUERNA 24

4 RESULTAT 25

4.1 ENKÄTER 25
4.1.1 TOLKNING AV TABELLERNA OCH DIAGRAMMEN 28
4.2 INTERVJUER 29
4.2.1 TOLKNING AV INTERVJUERNA 33

5 DISKUSSION 36

5.1 VILKA STRATEGIER ANVÄNDER SIG ELEVERNA AV FÖR ATT LÄRA SIG PRODUKTEN AV TVÅ HELTAL? 36
5.2 FINNS DET NÅGOT SAMBAND MELLAN KUNSKAPERNA I MULTIPLIKATIONSTABELLEN OCH FAKTORISERINGEN AV ETT HELTAL? 37
5.3 METODDISKUSSION OCH KRITIK TILL ARBETET 38

6 SAMMANFATTNING 40

7 REFERENSER 41

Figur- och tabellförteckning

Tabell 1: Resultat av enkäten för hela populationen 25

Tabell 2: Omvårdnadsprogrammet ***26***

Tabell 3: Samhällsvetenskapliga programmet ***26***

Figur 1: Diagram 1, Redovisning av resultatet för del 1 för omvårdnadsprogrammet ***26***

Figur 2: Diagram 2, Redovisning av resultatet för del 2 för omvårdnadsprogrammet ***27***

Figur 3: Diagram 3, Redovisning av resultatet för del 1 för samhällsvetenskapliga programmet **27**

Figur 4: Diagram 4, Redovisning av resultatet för del 2 för samhällsvetenskapliga programmet **27**

Bilagor

Bilaga 1: Enkät ***44***

1 Inledning

Hur bär du dig åt när du ska multiplicera två heltal? Alla har vi lärt oss multiplikationstabellen och alla har vi olika strategier för att komma ihåg produkten av två heltal. Personligen har jag inte tänkt på hur just jag kommer ihåg produkten av två heltal, förrän jag började arbeta med valet av uppsatsämne. Vi har olika kunskaper med oss från grundskolan till gymnasiet. Ämnet matematik kan ses som ett pussel. Den består av olika delar, multiplikationstabellen kan ses som en del av pusslet. Alla delarna i pusslet ska falla på plats. Pusslet är färdigt när eleverna har tagit del av alla delar inom matematiken för den aktuella årskursen. Därför blir multiplikationstabellen en av delarna i pusslet. Därav kommer titeln: *multiplikationstabellen en del av pusslet, vilka är bitarna?*

1.1 Bakgrund

Min tanke är att kunskapen i multiplikationstabellen borde vara bestående, eftersom vi börjar arbeta med den tidigt i skolåldern. Även som vuxna använder vi oss av multiplikation vid olika tillfällen. Därför blev jag intresserad av att undersöka hur elever på gymnasieskolan har tagit del av multiplikationstabellen och hur mycket kunskaper de har med sig från grundskolan. En annan anledning till varför jag har blivit intresserad av att studera kunskaperna i multiplikationstabell hos gymnasieelever, är de krav som ställs på eleverna för att klara av matematikkurserna.

> Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer (Skolverket b, 2005, sid. 2).

Relevanta mål som elever ska ha uppnått i slutet av det femte skolåret är:

- Eleverna ska förstå och kunna använda addition, subtraktion, multiplikation och division samt kunna upptäcka talmönster och bestämma obekanta tal i enkla former.
- Eleverna ska också kunna räkna med naturliga tal i huvudet, med hjälp av skriftliga räknemetoder och med miniräknare (Skolverket b, 2005).

Multiplikationstabellen ska eleven ha lärt sig i slutet av det femte skolåret (Utbildningsdepartementet, 2004). I de kommande årskurserna förutsätter man att eleverna har lärt sig de fyra räknesätten och kan använda dem i olika sammanhang. Jag tror att de elever som har svaga tabellkunskaper i multiplikation får sällan chansen att lära sig den på nytt. Det kan visa sig i försämrad förmåga att kunna dela upp ett heltal i faktorer och räkning med algoritmer.

I kursplanen för grundskolan, ämnet matematik, finns det inte något tydligt krav på att kunna multiplikationstabellen. Men eleven ska ”ha goda färdigheter i och kunna använda överslagsräkning och räkning med naturliga tal och tal i decimalform samt procent och proportionalitet i huvudet, med hjälp av skriftliga räknestrategier och med tekniska hjälpmedel” (Skolverket b, 2005, sid.1). Detta är ett av målen som eleverna ska uppnå i slutet av det nionde skolåret. Någonting som man kan fundera över är om det går att nå dessa mål utan att kunna använda sig av multiplikationstabellen? Skolverket säger att om det finns särskilda skäl kan läraren bortse från vissa kriterier i de mål som eleven ska uppnå. Med särskilda skäl menas i detta fall funktionshinder eller andra personliga förhållanden som är temporär och som gör ett abrupt hinder för elever att uppfylla målen för ett visst kriterium (Skolverket b, 2005).

Sharin och Fuson (2005) har i artikeln *Multiplication strategies and the appropriation of computational resources*, sammanfattat studien om olika strategierna som barn har då de lär sig multiplicera. Syftet med deras studie var att klassificera strategierna vid utförande av multiplikation mellan två ental. De sammanfattar resultatet av sin studie i ett antal kategorier. Författarna har konstaterat att det finns strategier som visar var i inlärningsprocessen av multiplikationstabellen eleverna befinner sig. Det är bland de kategorierna som Sharin och Fuson (2005) har kommit fram till, som jag har tagit del av och undersökt vilka eller vilken av strategierna som eleverna i min undersökning använder sig av. Jag kommer även att, till skillnad från deras undersökning, studera sambanden mellan multiplikationstabellen och faktorisering av ett heltal. Gray och Tall (1994) i sin artikel *Dualty, Ambiguity and Flexibility: A Procedual View of Simple Arithmetic*, klargöra för begreppen *procept* och *concept*, som jag använder mig av för att förklara elevernas helhetsuppfattning vid multiplikation av två heltal.

1.2 Syfte och problemställningar

Syftet med studien var att undersöka vilken eller vilka strategier gymnasieelever använder sig av vid multiplikation mellan två heltalsfaktorer samt ta reda på vilka samband det finns mellan kunskaperna i multiplikationtabellen och faktorisering. Utifrån syftet har jag formulerat följande frågeställningar:

- *Vilka strategier använder sig eleverna av för att lära sig produkten av två heltal?*
- *Finns det något samband mellan kunskaperna i multiplikationstabellen och faktoriseringen av ett heltal?*
    - *Vilka delar av multiplikationstabellen har eleverna svårigheterna med?*

1.3 Riktlinjer för uppsatsen

Under arbetets gång har jag tagit del av diverse rapporter från bland annat från skolverket. De har haft sitt omfång inom områden som handlar om färdigheterna i multiplikationstabellen, olika sätt att lära sig multiplikationstabellen och olika typer av inlärning och minne. En del av undersökningarna berör inlärning av multiplikationstabellen hos eleverna på grundskolan. Det för att kunna ha bakgrund till hur gymnasieelever har tagit del av kunskaperna i multiplikation. Det finns även en del rapporter om kunskapsskillnader i matematik mellan olika program samt mellan killar och tjejer. Jag kommer att bortse från genusperspektivet. Jag kommer jag att fokusera på tolkningen av de nuvarande kunskaperna/förståelsen av multiplikationstabellen hos eleverna. En studie om gymnasieelevernas kunskaper i multiplikationstabellen presenteras, där också en jämförelse mellan två program analyseras. Koncentrationen kommer att ligga på jämförelsen mellan kunskaperna i multiplikationstabellen och faktoriseringen av ett heltal och de olika strategierna som gymnasieeleverna har för att komma ihåg produkten. Då jag talar om tal så menar jag positiva heltal om ingen annat anges i texten. Med faktorisering menar jag uppdelningen av ett heltal i faktorer.

2 Teoretisk litteraturgenomgång

2.1 Vikten av att kunna hantera begrepp och symboler

Inlärning kan förklaras som en inre process som leder till någorlunda varaktiga utvecklingar. De kan yttra sig i erfarenhet och beteende som följd av tidigare erfarenheter. Det är svårt att studera inlärning utifrån, eftersom det är en inre process (Fäldt, 1997). Därför är det intressant att studera resultatet av och sambanden kring inlärning. Den informella matematiken utvecklas genom nyfikenhet och viljan att lära sig (Fäldt, 1997). Ginsburg (1997) påpekar att lärarnas bemötande av informellkunskap ska vara med omtanke eftersom den kan påverka elevernas senare utvecklig och intresse i ämnet (Ginsburg, 1997 i Sterner och Lundberg, 2004).

I matematiken använder man sig av olika symboler/tecken för att bland annat utföra olika operationer. Den symbolismen som finns inom matematiken enligt Gray och Tall (1994), har medfört både fördelar och nackdelar vid inlärning av matematik. *Men vad är det som är problematiskt med symbolismen inom matematiken?* En intressant upptäckt har Sinclair och Sinclair (1986) gjort. De har lagt märkte till att i förskolan har betydelsen av symbolismen/begreppsinlärningen försvunnit. Det vill säga de begreppen som inte används och inte sätts i sitt rätta sammanhang kommer kunskapen om de gå förlorade. Det i sin tur leder till att helhetsuppfattningen hos eleverna försummas. Gray och Tall (1994) har kommit fram till att kunskapen kan ses som *processer* som utvecklas vartefter eleverna skaffar sig mer kunskaper. Kunskapen kvarstår som ett objekt i vårt tänkande om de inte tas vara på och sätts in i olika sammanhang. Till slut omvandlas processerna till *concepter* vilket kan resultera till sämre prestation, mer om dessa begrepp längre fram (Gray & Tall, 1994).

Inlärning av multiplikationstabell kan ses som begreppsinlärning. Multiplikationstabellen kan delas upp i två olika tabeller. Den lilla multiplikationstabellen som har produkten mindre eller lika med 9 och den stora multiplikationstabellen som har produkten mindre eller lika med 81. Vid diagnos av multiplikationstabell är det viktigt att den är tidsbegränsad. Om eleverna skulle få obegränsat med tid skulle eleverna lösa alla uppgifter genom att använda fingrarna (Johansson & Kilborn, 1982). Många lärare använder sig av strategin där eleverna tränar på multiplikationstabellen genom att lösa femtiotal osystematiskt uppställda kombinationer på 3-5 minuter. Allteftersom gäller det att räkna snabbare och snabbare. Om tanken är att eleverna ska lära sig multiplikationstabellen har Kilborn (1997) konstatera att den här metoden är helt meningslös med tanke på lagringsutrymmet. Han menar att om inlärning har skett på detta vis kan det knappast bero på metoden, eftersom begreppsinlärningen är i sin tur kopplad till minnet (Johansson & Kilborn, 1982).

2.2 Något om minnet

Det vi kan säga om minnet är att det är en komplicerat företeelse. Ständigt pågår det forskning kring ämnet. Det finns tre så kallade stationer i ett minnessystem som låter informationen passera genom. Den intagna informationen registreras först i ett sensoriskt minne, där den bevaras under en kort stund (Fäldt, 1997). När vi ska lära oss, exempelvis $2 \cdot 3 = 6$, är kunskapen kvar under kort tid i minnet, för att sedan gå förlorad om den inte förs vidare till kortidsminnet. Om vi inte repeterar talet så kvarstår den endast 25 till 30 sekunder i minnet. Om vi skulle fortsätta att repetera talet kommer den så småningom att hamna i långtidsminnet som använder sig av associationer och samtidigt kodar den intagna informationen. Förutom kortidsminnet och långtidsminnet finns det en annan form av minne som kallas för eidetiskt minne. Den typen av minne går ut på att personen i frågan kan överföra en synupplevelse från det sensoriska minnet till långtidsminnet i form av fotografliknande minnesbilder (Fäldt, 1997).

2.2.1 Hur lägger vi kunskapen på minnet?

Unenge, Sandahl och Wyndhamn (1994) illustrera två exempel på hur minnesfunktionen fungerar då vi ställer frågan: *Hur mycket är 7 gånger 8?* Förhoppningsvis får vi snabbt svaret, 56. Svaret förklaras oftast med att eleven visste svaret. Då kan man säga att just denna produkt finns lagrad i långtidsminnet. Naturligtvis växlar kapaciteten i långtidsminnet från person till person. När vi ställer frågan: H*ur mycket är 7 gånger 84?* Är det troligt att svaret inte kommer lika snabbt. Svaret finns då inte lagrad i långtidsminnet. Då man arbetar med större tal kan miniräknaren vara till hjälp för att slippa belasta minnet (Unenge, Sandahl & Wyndhamn, 1994). Fäldt (1997) hävdar att belasta minnet är nyttigt. Om eleverna belastar minnet genom att lära sig att $84 = 7 \cdot 12$ eller att $84 = 2 \cdot 42 = 2 \cdot 7 \cdot 6$ är det utvecklande för minnet, eftersom sådana kunskaper finns redan lagrade i långtidsminnet (Fäldt, 1997).

Glömska är ett annat fenomen som är då motsatsen till minnet. Vi glömmer genom en aktiv bortträngningsprocess. Minnet finns kvar i undermedvetet form. Glömska orsakas av att en del i hjärnan har blivit skadat. Det finns en annan teori om glömska som säger att den uppkommer genom att olika inlärningar kommer tätt in på varandra. På så sätt stör de varandra, glömskan blir mindre om vi efter inlärningen ägnar oss åt andra aktiviteter (Fäldt, 1997). Av den anledningen bör inte inlärningen av multiplikationstabellen skyndas på. Lärarna borde se glömska som en del av motivationen för att inte jäkta genom inlärningen av multiplikationstabellen (Kilborn 1979).

2.3 Förståelsen av matematik hos eleverna

I en undersökning som Skolverket har gjort visade det sig att en del elever har lärt sig regeln att vid multiplikation blir svaret större och vid division blir svaret mindre. Det i sin tur leder till att eleverna inte kan beräkna $234 \cdot 0{,}2$ och $15/0{,}5$ på ett korrekt sätt (Skolverket d, 2005). *Behöver vi veta hur det fungerar?* Det är frågan som en av författarna till boken *Teaching mathematics*, Harnasz (1994) försöker besvara. Förståelsen är viktigare än mängden fakta som eleverna lär sig. Att veta hur multiplikationstabellen är uppbyggd gör det lättare för eleverna att lära sig den med förståelse (Harnasz, 1994). Matematisktkunnande innebär att kunna tänka matematiskt i olika situationer. En mängd olika komponenter lägger grund till elevernas nuvarande kunskaper i matematik. Man kan också säga att eleverna lär sig matematiska verktyg som ger mening, då verktygen ger oss mening när vi kan relatera de till olika användbara situationer (Nunes & Bryant, 1996).

I läroplanen och den kunskapssyn som finns i den, uttrycks det klart att eleven ska skapa insikter om sitt eget lärande. Kunskaperna uttrycks i olika former, det vill säga fakta, förståelse, färdighet och förtrogenhet (Utbildningsdepartementet, 2001). Kilborn (1997) hävdar att förståelsen för hur ett räknesätt fungerar är inte tillräcklig förutsättning för att eleverna ska kunna hantera räknesättet. Eleverna ska också ha färdigheter. Om detta ska uppnås krävs det att eleverna sätts i arbetssituationer som understödjer detta (Skolverket d, 2005). Som läraren bör man utveckla möjligheterna till det och ge tillgångar till nya sätt att tänka. Nunes och Bryant (1996) menar att förståelsen kan skapas på olika sätt, här beskrivs de vanligaste sätten:

- Förstå nya metoder genom att lösa nya uppgifter. Här är det viktigt att ta vara på den egna representationen, de verktyg man har med sig. Det handlar alltså om att ta vara på de kunskaperna eleverna redan har lärt sig.
- Det förutsätts också att eleverna ska bygga på med nya kunskaperna så småningom.

- Slutligen ska eleverna förena gamla kunskaper med nya situationer (Nunes & Bryant, 1996).

Det finns bland annat fyra olika situationer som ger eleverna möjlighet att tidigt komma i kontakt med multiplikation som räknesätt. Samtidigt är det också viktigt att vända på samma typer av uppgifter och lära eleverna att lösa de med hjälp av division för att får större förståelse för multiplikation som räknesätt (Nunes & Bryant, 1996). Här nedan presenteras de fyra olika räkneexempel:

- *Räkneexempel 1*, kallas för gruppering/delning. Ett exempel på det är: Melissa har fått 4 äppelplantor. Det finns 6 äpplen på varje planta. Hur många äpplen är det sammanlagt? Svaret kan då ges i upprepad addition eller som multiplikation av två faktorer, $6+6+6+6=4\cdot 6=24$. Om vi istället vänder på problemet och säger att Melissa har några äppelplantor. På varje planta finns det 6 äpplen. Tillsammans är det 24 äpplen. Hur många äppelplantor har Melissa? Då är det division som vi arbetar med (Nunes & Bryant, 1996).
- *Räkneexempel 2*, kallas för förändring. Här tas upp exempel som: Ellen cyklar 5 kilometer per timme. Hur många kilometer cyklar hon på 3 timmar? Svaret är $3\cdot 5=15km$. Här kan vi också vända på problemet och säga att Ellen cyklar 5 kilometer per timme. Hur många timmar tar det henne att cykla 15 kilometer (Nunes & Bryant, 1996)?
- *Räkneexempel 3*, kallas för priser. En chokladbit kostar 4 kronor. Hur mycket kostar 7 chokladbitar? Det sättet att tänka här är: $7+7+7+7=4\cdot 7=28$ det vill säga genom upprepad addition eller multiplikation. Kommutativa lagen synliggörs här väl (Nunes & Bryant, 1996). Vänder vi på problematiken får vi att en chokladbit kostar 4 kronor. Hur många chokladbitar kan man köpa för 28 kronor (Treffers & Buys, 2001)?
- *Räkneexempel 4*, kallas för multiplikativ jämförelse eller med andra ord relevant jämförelse. En stol är 3 gången så hög som en pall. Pallen är 20 centimeter hög. Hur hög är stolen? Här är det åter igen upprepad addition. Vi kan även tänka på hur många gånger får en pall får plats i en stol, eller så kan vi tänka hur många gånger högre är stolen än pallen? (Nunes & Bryant, 1996).

När arbetet med multiplikation introduceras i skolan handlar det oftast om upprepad addition, precis som ovannämnda exemplen. Det är i det skede viktigt att eleverna får en kontinuitet i sin tankeform. Eleverna behöver lära sig att skilja mellan multiplikand och multiplikator (Kilborn, 1995). Det Kilborn (1995) menar är att eleverna ska lära sig skilja mellan det som ska multipliceras och det antal gången multiplikationen ska säga rum. $5+5+5=3\cdot 5=3+3+3+3+3$, har inte samma innebörd, men produkten är den samma. Å andra sidan så länge eleverna håller sig till de naturliga talen fungerar det att använda sig av upprepad addition. Att ha förståelse för multiplikation och division är angeläget men inte via addition hävdar Nunes och Bryant (1996). Eleverna måste lära sig att sätta siffrorna i helt nya sammanhang som är relaterade till multiplikation och division (Nunes & Bryant, 1996). När eleverna börjar arbeta med negativa talen och bråken kan de inte längre använda sig av vardagstänkandet. Multiplikation av typen $a \cdot (-b)$ saknar vardagsanknytning, dock är det matematiskt intressant (Kilborn, 1995). Däremot får eleverna lära sig då konsekvenserna av kommutativa lagen när det gäller multiplikation av negativa heltal. Det vill säga att eleverna ska känna till räkneregler så som $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$. Knyter vi an detta till divisionen kan den definieras med hjälp av multiplikation och konstatera att det är även svårare att hitta vardags-betydelse. Division definieras enligt följande: $a / b = x$ där $b \cdot x = a$, där vi har använt oss av annulleringslagen (Kilborn, 1995).

2.4 Vad står procept för?

Två begrepp som kan sammanfattar elevernas uppfattningen som elever kan ha vid utförande av multiplikation är *procept och concep* så som författarna Gary och Tall (1994) uttrycker sig. Något svenskt namn för dessa två uppfattningar finns det inte. Direkt översättning av procept är, innehållet i det upplevda och concept står för objekt, saker. Dessa två begrepp har med förståelsen och uppfattning att göra. Författarnas (Gray och Tall, 1994) teori är att meningsfullt matematiskttänkande är en blandning av process och concept som tillsammans kallas för *procept*. Produkten av två tal, exempelvis $3 \cdot 2$ kan uppfattas som multiplikation mellan två tal, alltså finns det en relation mellan dessa två tal (process) eller som ett begrepp (concept). Om produkten av dessa två tal uppfattas som multiplikation av talen är proceptuellttänkande uppnått, vilket påvisar en mer avancerad kunskap (Gray och Tall, 1994).

Elever som kan se talet 24 som en uppbyggnad av relationer (processer) mellan olika fakto-rer, exempelvis 6 och 4 eller 2 och 6 eller 12 och 2, sägs har uppfattat relationen på rätt sätt, det vill säga eleven har förstått att talet 24 kan uppsåt på olika sätt. Det handlar om att både se processen och begreppet som en möjlighet. Författarna sammanfattar procept genom att säga att det är en blandning av två komponenter. Den första är processen som producerar den matematiska relationen mellan talen. Den andra är symbolismen inom matematiken som representerar antingen process eller concept, det vill säga uppfattningen av de matematiska symbolerna. Om vi tittar på talet 6, den inkluderar processen av att eleven kan räkna till sex, liksom att siffran 6 kan representeras av 3+3, 4+2, 2+4, $3 \cdot 2$, 8-2 och så vidare. Alla dessa symboler representerar samma objekt, talet 6, genom olika processer (Gray & Tall, 1994).

Författarna Gray och Tall (1994) ifrågasätter inlärningsmetodiken vid multiplikationstabellen. *Ska man lära sig addition före multiplikation?* De vill hävda att matematiken i skolan är för subjektiv. I undervisningen av multiplikationstabell borde läraren ha utgångspunkt i begreppen concept och process (Gray & Tall, 1994). För att eleverna ska skaffa sig förståelse och utveckla tal uppfattningsförmågan, menar Gray och Tall (1994), kan det nås i tre steg. Det synliggörs genom addition av två tal, 2+4. Det första steget är att eleven ska ha ett gott tal uppfattning. Eleven ska lära sig räkna (count-all) och se båda talen som en procedur. Först räknar eleven exempelvis på fingrarna till två sen till fyra, innan de kan se att det blir sex, vilket sammanfattas av begreppet *procedur*. Det andra steget är att eleven har redan lär sig uppfatta ett av talen som helhet, där talet 2 kan beskrivs som en relation mellan två andra tal (procept). Talet 4 uppfattas fortfarande som en procedur (begrepp). Eleven skulle då börja räkna från två: *tre, fyra, fem och sex* och på så sätt komma till resultatet. Den nådda uppfattningen i detta skede kan sammanfattas som *procept + procedur*. Slutligen i det tredje steget ska eleven kunna se relationen mellan båda talen (procept), det vill säga att 2 *plus* 4 *blir* 6, ($2+4=6$). Då har vi *procept + procept* som fastställer resultatet och helhetsuppfattningen som eleverna ska ha (Gray & Tall, 1994).

2.5 Kunskapen i multiplikation

I skolan handlar matematiken ofta om problemlösning. I det flesta fall bygger den på färdigheterna i multiplikation. Undersökningarna visar att eleverna som ska multiplicera två tvåsiffriga heltal får problem då deras kunskap i multiplikationstabellen är dålig. Orsaken till detta menar Kilborn (1979) är att övning i multiplikationstabellen ligger för sent i kursplanen. Han säger också att lärarna och läromedlen har för bråttom med metodisk undervisning av multiplikationstabellen och att elevgrupper är för stora (Kilborn, 1979).

Kilborn (1979) har i sin studie om grundläggande aritmetik försökt besvara frågan: *Spelar det någon roll på vilket sätt man kan multiplikationstabellen?* Han menar att frågan är relevant, men att förstå multiplikationstabellen är ännu viktigare. Vikten av att lära sig multiplikationstabellen utantill är en nödvändig kunskap då eleverna ska multiplicera tvåsiffriga tal, då man förutsätter att miniräknaren inte används. Om vi antar att eleven kan multiplikationstabellen utantill och att eleven får använda fingrarna, upprepad addition eller några andra metoder, *har då eleven tillräckliga förkunskaper för att multiplicera två tvåsiffriga tal?* Enligt Kilborn (1979) har inte elever inte den kapaciteten i arbetsminnet för att klara av en sådan uträkning. Större delen av arbetsminnet blockeras i det skedet och det gäller normalpresterande elever enligt Kilborn (1979). Han hävdar att ju lägre presterande en elev är, desto större anledning att kunna hela multiplikationstabellen utantill.

Elever som har problem med att lära sig multiplikationstabellen misslyckas med var åttonde kombination. Det på grund av att multiplikationstabellen är associativa och kommutativa lagen gäller. Rent teoretiskt skulle eleverna i årskurs 4 kunna lära sig en kombination i månaden. Hela multiplikationstabellen skulle då vara klar till våren i årskurs 4. Då förutsätts det att det är sju kombinationer åt gången. Med det sagt, menar Kilborn (1979), att problemet ligger hos lärarna och inte hos eleverna. Lärarnas förmåga att motivera och arbeta systematiskt med multiplikationstabellen har misslyckats (Kilborn, 1979).

2.6 Hur påverkar kunskaperna i multiplikationstabellen användningen av algoritmer?

En algoritm är en regel för hur man ska genomföra en välbeskriven uppgift (Dahl, 1996). Kilborn (1997) anser att elever som inte kan behärska multiplikationstabellen kommer att få problem när de börjar arbeta med algoritmer. Risken att uträkningen blir fel är stor. Speciellt vid multiplikation av typen $16 \cdot 23$ med tanke på tankemödan eleven måste lägga ner, det förutsätts att miniräknaren inte används.

Sterner och Lundberg (2004) säger att eleverna lär sig multiplikation genom undersökningar av sambanden i tabellerna. Sambanden mellan talen är viktiga för elevernas motivation och självförtroende. På så sätt får eleverna bekräftelse på de redan befintliga kunskaperna. Genom att introducera kommutativa lagen reduceras mängden tabellfakta hos eleverna. Om tabellerna studeras med fokus på begreppsförståelsen kan eleverna återkalla kunskaperna vid behov. I motsats till detta är att eleverna ska förlita sig på minneskunskaper. Om tabellfakta inte sätts i sammanhang kommer kunskaperna går förlorade (Sterner och Lundberg, 2004). Eleverna inser så småningom att allt inte hänger på minneskunskaperna, eftersom begreppsförståelsen är minst lika viktigt att ta vara på. Av den orsaken blir distributiva lagen, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, näst steg att introducera för eleverna. Den knyter samman kunskaperna i addition och multiplikation, exempelvis: $2 \cdot (4 + 3) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3$ (Chin & Aschroft, 1998 i Sterner och Lunberg, 2004). Talsystemets struktur kan skapa klarhet genom exemplifiering (Treffers & Buys, 2001 i Sterner och Lundberg, 2004).

2.7 Så förstår vi multiplikationstabellen

Talet *noll* är ett viktigt begrepp som kan introduceras på olika sätt. Det som är värt att poängtera för eleverna är att alla tal som multipliceras med *noll är lika med noll*, och det gäller oavsett hur stort tal det än multipliceras med noll. En del elever plockar bort nollan till en början i exempelvis $5 \cdot 20$, för att de redan känner till produkten av $5 \cdot 2$. Vid multiplikation med talet 1 är det angeläget att ta upp med eleverna olika exempel så som att, 3 mängder av 1 är lika med 3. Ett tal multiplicerat med 1 är alltid *lika med* värdet av det talet (Chin & Aschroft, 1998 i Sterner och Lundberg, 2004).

Förutsättningen för att lära sig multiplikationstabellen är kunnandet i positionssystemet. Tio är en referenspunkt för fortsatt arbete. Eleverna kan utnyttja kunskaperna i tians tabell för att lära sig nians och femmans tabell. Positionssystemet av exempelvis talet 40 (4 representerar tiotalen och 0 representerar entalen) är viktig beståndsdel i förståelsen av tal. Med ettans tabell kan eleverna arbeta genom att undersöka mönster mellan ettans och tians tabell.

$3 \cdot 1 = 3$	$3 \cdot 10 = 30$
$4 \cdot 1 = 4$	$4 \cdot 10 = 40$
$5 \cdot 1 = 5$	$5 \cdot 10 = 50$
$6 \cdot 1 = 6$	$6 \cdot 10 = 60$

Elever har kunskap i att två är fler än ett, två är dubbelt så mycket, tvåan är ett jämnt tal och jämna tal kan delas i två lika stora delar. Dessa insikter kan utnyttjas i att alla produkter i tvåans tabell slutar på tal 0,2,4,6,8. Med eleverna kan man föra ett samtal om *varför det är så och hur man kan utnyttja sig av att veta produkten av* $2 \cdot 5$ *för att hitta produkten till* $7 \cdot 2 eller 8 \cdot 2$? För att förstå fyrans tabell kan eleverna utnyttja de kunskaperna från tvåans tabell. Även här kan eleverna upptäcka tal mönster mellan 0,2,4,6,8. Vid inlärning av femmans tabell kan eleverna tänka att fem är halvvägs från noll till tio. Eleverna lär sig att fem är ett udda tal. Elever kan referera talet fem med att de har fem fingrar på handen. Författarna

Sterner och Lundberg (2004) i sin rapport kallar faktorerna fem och två för den mittersta referenspunkten med kombination av distributiva lagen, $7 \cdot 2 = 5 \cdot 2 + 2 \cdot 2$. Femmans och tians tabeller samt tvåans, fyrans och åttans är viktiga för elevernas upptäckande av samband mellan talen (Chin & Aschroft, 1998 i Sterner och Lundberg, 2004).

Författarna Sherin & Fuson (2005) förklarar vad som menas med enklare och svårare faktorer. Med *enkla* faktorer är de som ger en produkten mindre än 9, *ganska enkla* faktorer är de som ger produkten mellan 10-18, *ganska svåra* faktorer är de som ger produkten mellan 20-36 och *svåra* faktorer är de som ger produkten mellan 36-81 (Sherin & Fuson, 2005).

När vi lär oss addition och subtraktion är det enklare att koppla tabellinlärningen till upplevelser från vardagslivet. Däremot med multiplikation är det inte lika enkelt att koppla tabellinlärningen till erfarenheter. Det på grund av att det är svårare att lära sig tabeller utan någon form av utantill inlärning. Kilborn (1997) resonerar att utantill träning av multiplikationstabellen inte innebär att det sker utan förståelsen. Eleven kan förstå att

$$7 \cdot 8 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8$$

liksom att

$$8 \cdot 7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$$

utan kännedom om att $8 \cdot 7 = 56$ (Gamstedt, 1993). Författaren Kilborn (1997) kalla della för synonymfärdigheter och om eleverna inte kan behärska detta kommer inte kunskaperna att vara till någon nytta vid huvud- och algoritmräkning. Därför bör kunskaperna i multiplikationstabellen vara automatiserade. Innan eleverna kan utföra multiplikation av två heltal i huvudet är det framför allt två komponenter som elever ska ha med sig. Den ena är kunskapen i och om multiplikation som räknesätt och den andra är distributiva lagen (Kilborn, 1997). Målet med multiplikationstabellen är dels att kunna förstå den och dels att kunna rabbla den utan eftertanke (Henderson & Miles, 2001 i Sterner och Lundberg, 2004).

2.8 Olika strategier för lärande av multiplikationstabellen

Strategierna är individuella och därför är det omöjligt att representera alla. Som redan nämnt uppfattas multiplikation oftast som upprepad addition hos nybörjare. Nackdelen med denna typ av räkning är att det tar lång tid och kräver en metodisk och explicit handledning, dessutom fungerar denna metod mindre bra när vi hanterar stora tal (Kilborn, 1997). Eleven måste lära sig en korrekt multiplikation, vilket innebär användning av flexibla strategier.

Undervisningen bör ha sin utgångspunkt i att lära eleverna att använda sig av olika strategierna redan vid problemlösning. Övergången från strukturbaserad till formell multiplikation sker genom resonemang om tal relationer, aritmetiska egenskaper, kända tal produkter samt med hjälp av verklighetsanknuten undervisning. Kilborn (1997) tycker att det är viktigt att elever lär sig korrekt termologi och logik. Med det menar han att eleverna ska lära sig betydelsen av att $4 \cdot 5$ ger samma produkt som $5 \cdot 4$, där 5 och 4 är faktorer och att 20 är en produkt av två heltal (Kilborn, 1997).

Sherin och Fuson (2005) sammanfattar i sin undersökning de olika strategier som elever har för att lära sig produkten av två heltal. Författarna har samlat resultatet i sex olika kategorier: *count-all* (räkna alla), *additive calculation* (additionsräkning), *count-by* (uppräkning av vissa), *pattern-based* (mönsterbaserat), *learned products* (kända produkter) och *hybrid* (blandform). Var och en av kategorierna beskrivs med ett antal exempel. Den förstnämnda är den enklaste formen och sen ökar de i begriplighetsgrad. Skillnaden mellan strategierna är svåra att upptäcka bland de mindre talen i tabellen. Då eleverna har lärt sig hela tabellen bör deras inlärningsprocess sammanfattas av kategorin *hybris.* Här nedan beskrivs var och en av kategorierna med tillhörande exempel (Sherin & Fuson, 2005) .

- *Count-all:* Själva ordet talar om för oss att det handlar om att räkna sig fram till resultatet. Det kan vara genom att elever ritar grupperade figurer som de sedan räknar. Exempelvis: tolv elever, tre bord hur många elever ska sitta vid varje bord? Det går lika bra att eleverna räknar på fingrarna med eller utan hjälp av addition (Sherin & Fuson, 2005).
- *Additive calculation:* Handlar om att eleverna lär sig räkna genom diverse uppställningar av upprepad addition. Exempelvis: $4 \cdot 5 = 20$, uppställningen kan se ut på följande sätt: 4+4=8, 8+4=12, 12+4=16, 16+4=20. (Sherin & Fuson, 2005) .
- *Count-by:* Denna kategori tar upp olika exempel där eleverna memorera in olika ramsor för att komma ihåg produkten. Exempelelvis: $5 \cdot 7 = 35$, kan se ut på följande sätt, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, där eleven för varje siffra förflytta upp ett finger tills eleven har kommit till det sjunde fingret. Det förekommer även att eleverna skriver upp exempelvis talet 5 sju gånger efter varandra eller räkna på fingrarna för att sedan komma fram till produkten. Tvåans, femmans och tians tabell kan läras in genom att använda sig av den här strategin (Sherin & Fuson, 2005).
- *Pattern-based:* Kategorin sammanfattar hur eleverna upptäcker mönster och använder sig av räkneregler som de redan har kommit i kontakt med, så som multiplikation med talen 0, 1 och 10, för att komma fram till produkten. Eleverna kan också själva hitta olika mönster

i multiplikationstabellen. Nians tabell kan läras in genom att eleven sänker det fingret som nian ska multipliceras med. Den högra handen representerar tiotalen och den vänstra handen representerar entalen. Exempelvis $9 \cdot 4 = 36$, Man böjer det fjärde fingret på vänstra handen. De första fingrarna som är uppe, tummen, pekfingret och mittfingret representerar tiotalen, 10, 20, 30. Lillfingret är ental tillsammans med högerhanden: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Svaret blir då 36 (Sherin & Fuson, 2005) .

- *Learned products*: Är kategorin som representerar elever som lär sig produkterna utan att behöv ta hjälp av fingrarna eller några andra visuella föremål. En del elever använder sig av redan kända produkter, exempel på det är: $8 \cdot 6 = 4 \cdot 12 = 2 \cdot 24$. När eleverna nästan har lärt sig hela multiplikationstabellen är det sexans, sjuans och åttans tabell som de lär sig i slutskede genom utantill inlärning av produkterna. Detta kallas också för gradvisinlärning då de minde talen i tabellen kommer först (Treffers & Buys, 2001 i Sterner och Lundberg, 2004, Sherin & Fuson, 2005).
- *Hybrids:* Kategorin representerar en blandning av de redan nämnda kategorier där eleven använder en eller flera olika strategier samtidigt. Addition av ett tal kombineras med en redan känd produkt för att komma fram till den nya produkten Exempelvis: $5 \cdot 7 = 35$ lägger vi till 7 blir det 42 och då har vi fått produkten av $6 \cdot 7$ eller $8 \cdot 6 = 4 \cdot 12 = 4 \cdot 10 + 4 \cdot 2$ eller $8 \cdot 6 = 4 \cdot 6 + 4 \cdot 6$ (Treffers & Buys, 2001 i Sterner och Lundberg, 2004, Sherin & Fuson, 2005).

Uppgifter som involverar multiplikation med enklare faktorer uppfattas lättare och troligtvis kan lösas genom *learned products*. Samma gäller med uppgifter som innehåller samma faktorer, $6 \cdot 6 = 36$ (Sherin & Fuson, 2005).

Då vi tittar närmare på åttans tabell kan vi utgå ifrån att eleverna använder sig av redan kända tal fakta, som finns lagrat i långtidsminnet. Här introduceras ett av många sätt som åttans tabell kan förstås och läras in (Chin & Aschroft, 1998 i Sterner och Lundberg, 2004). Med tidigare kunskaperna har $8 \cdot 1$ en redan känd produkt. $8 \cdot 2$ kan ses som 8+8. $8 \cdot 3$ förstås som $2 \cdot 8$ +8. Produkten till $8 \cdot 4$ förstås om vi dubbla $2 \cdot 8$ eller $5 \cdot 8 - 8$ eller byter plats på faktorerna $4 \cdot 8$. $8 \cdot 5$ är hälften av $10 \cdot 8$. $8 \cdot 6$ kan uppfattas som $5 \cdot 8 + 8$ eller dubbla $3 \cdot 8 + 3 \cdot 8$ eller $6 \cdot 8$. $8 \cdot 7$ är $5 \cdot 8 + 2 \cdot 8$ eller $6 \cdot 8 + 8$. $8 \cdot 8$ kan läras in som $5 \cdot 8 + 3 \cdot 8$ eller $4 \cdot 8 + 4 \cdot 8$. $8 \cdot 9$ är lika med $10 \cdot 8 - 8$. $8 \cdot 10$ har redan en känd produkt, och till sist $8 \cdot 11$ är $10 \cdot 8 + 8$ (Chin & Aschroft, 1998 i Sterner och Lundberg, 2004).

Elever med dyslexi har oftast brist på långtidsminne och har då svårigheter i att hämta fram talfakta snabbt och säker. Första steget är att lära sig mönstren, sambanden och relationerna mellan talen. Med övning nås färdighet och slutligen hamnar kunskaperna i långtidsminnet. Om övningstillfällen inte ges reduceras elevernas färdigheter när det gäller tabellkunskaperna (Sterner & Lundberg, 2004).

2.8.1 Miniräknaren

Miniräknaren är inte bara ett hjälpmedel då eleverna ska utföra en beräkning utan kan även användas som hjälp medel vid inlärning av multiplikationstabellen. I vanliga fall vid användning av miniräknare som hjälpmedel, innebär det att eleven måste veta vad som ska räknas ut, vilka siffror och räknesätt som ska tryckas. *Kan miniräknaren ersätta tabellkunskaperna?* Förmodligen inte, eftersom miniräknaren är endast ett hjälpmedel och kan inte ersätta den mänskliga kapaciteten. *Förlitar sig eleverna lätt på miniräknaren?* Unenge, Sandahl och Wyndhamn (1994) har kommit fram till att risken för det inte alls är stor. Eleverna vill klara uträkningarna på egen hand då de inte har stor vana vid miniräknaren. Miniräknaren kan också användas som metodiskt hjälpmedel. Som tidigare nämnt är det viktigt att eleverna har god taluppfattning innan de kan behärska multiplikationstabellen. Uppfattningen av talet 0 blir mer synligt med miniräknaren. Vanligtvis uppfattas talet 0 som att det inte betyder någonting. En enkel övning med miniräknaren kan vara om eleverna ska lära sig multiplikationstabellen. Genom att skiva in en siffra och multiplicera den med förslagsvis 1 och sedan trycka på ENTER upprepade gånger, för att sedan upptäcka mönstret i tabellen (Unenge, Sandahl & Wyndhamn, 1994).

3 Metod

3.1 Val av metod

I valet mellan kvalitativ och kvantitativ metod väljer man lämpligen den eller de metoder som bäst uppfyller syftet med undersökningen. Den empiriska studien bygger på en kombi-undersökning om elevernas kunskaper i multiplikationstabell, det vill säga en kombination av både kvantitativ och kvalitativ undersökningsmetod mer precist kombinerar jag enkäter med intervjuer (Andersen, 1998). Enkätens liksom intervjuernas innehåll är av relevans för undersökningens syfte, annars skulle enkäten ha fått en låg validitet. Dessa två kompletterar varandra eftersom enkäten ligger som underlag för intervjun. Dessutom tror jag att de tillsammans ger de ett mer rättvist och trovärdigt resultat. Anledningen till varför jag valde denna typ av metod är att får ut kvalitativa skildringar av elevernas livsvärld med syfte att tolka deras tankar (Kvale, 1997).

3.2 Genomförande

Enkäterna testades på en mindre population som avspeglade den totala populationen för att undersöka om enkäten fungerade och uppfyllde sitt syfte därtill kontroll av att enkätfrågorna var relevanta. Efter pilotstudien behövdes det inte göra några ändringar i enkäten. Pilotstudien har varit avgörande bland annat för att veta hur lång tid eleverna ska ha för att genomföra enkätens båda delar. Populationen var gymnasieelever i åldrarna 16-18, på omvårdnadsprogrammet (yrkesförberedandeprogrammen OP) och samhällsvetenskapliga programmet (teoretiskorienterade programmet, SP). Jag presenterade mig för eleverna och berättade vad undersökningen gick ut på. Jag gjorde det klart för eleverna att det är frivilligt att medverka. Enkäten var dubbelsidig och eleverna var tillsagda att genomföra del 1 först och senan då alla var klara med del 1 vända på bladet och genomföra del 2. Insamlingen av enkäten skedde därefter. De personer som valdes till intervju garanterades absolut anonymitet. Undersökningen genomfördes på en gymnasieskola i Kristianstad. Totalt var det två omvårdnadsklasser och en samhällsvetarklass som genomförde enkäten. Då undersökningen ägde rum läste samhällsvetenskapliga programmet kursen matematik B och omvårdnadsprogrammet läste kursen matematik A. Denna population var intressant tackvare den erfarenheter av multiplikationstabellen som eleverna bör ha fått sen tidigare utbildning på grundskolan. Dessutom var jag intresserad av att titta på kunskapsskillnaden mellan två program i och om multiplikationstabellen.

3.2.1 Genomförande av enkäten

Totalt fullföljde 32 elever enkäten (Bilaga 1). Enkäterna genomfördes under lektionstid där del 1 genomfördes först och därefter del 2, under samma lektion. Vid utförandet av del 2 förklarade jag för samtliga elever betydelsen av faktorisering, på grund av elevernas begäran. Eftersom jag inte studerar betydelsen av att kunna rätt termologi ansåg jag att informationen om vad faktorisering är, inte påverkade enkätens resultat. Enkäten gav mig ett underlag för att kunna ta fram de tänkvärdaste resultaten inför intervjun. Uppgifterna i enkäten hämtades från multiplikationstabellen, ett till elva. Enkäten innehöll också ett antal personuppgifter för att kunna koppla resultatet, programmet och könet till elevernas kunskaper i multiplikation. Uppgifter i båda delarna var enhetliga, del 1 med totalt 42 uppgifter och del två med 25 uppgifter, vilket det var det maximala antal rätt som eleverna kunde få. Eftersom enkäten innehåller matematiska beräkningar var svarsalternativen slutna i del 1 av enkäten. Del 2 innehöll öppna svarsalternativ, där eleverna kunde skriva fler än ett rätt svar (Rosengren & Arvidsson, 1992). Det var inte samma antal uppgifter i båda delarna av enkäten eftersom uppgifterna i del 2 var mer tidskrävande än i del 1. Del 1 går ut på att eleverna ska ange ett rätt svar, det vill säga produkten av två heltal. Del 2 gick ut på att eleven ska faktorisera ett heltal i två heltalsfaktorer, alltså omvänt jämfört med uppgiften i del 1. Anledningen till det var att om eleven har lärt sig multiplikationstabellen med förståelsen borde han/hon kunna ange rätt svar i del 2. Med tanke på elevernas erfarenhet av multiplikation var enkäten tidsbegränsad till 5 min per del och inga hjälpmedel var tillåtna. Sorteringen av enkätresultatet skedde efter antal rätt svar. Då eleverna inte svarade på en eller flera frågor i enkäten gav de uteblivna svaren inga rätt det vill säga 0 poäng. Samtliga svar i enkäten har studerats. Jag var också intresserad av att ta reda på vilken eller vilka delar av multiplikationstabellen hade eleverna svårigheterna med. Därför granskade jag svaren i båda delarna av enkäten. Eftersom multiplikationstabellens produkter delas upp i olika svårighetsgrader kommer jag därför att studera vilken eller vika av produkterna hade eleverna i min undersöknings bekymren med.

Resultatet av enkäter redovisas i tabellform och lådagram. Med hjälp av lådagram visas det variationen av det insamlade materialet liksom ett genomsnitt av enkätresultatet. Det presenteras också en jämförelse av resultaten mellan omvårdnadsprogrammet och samhällsvetenskapliga programmet under resultatavsnittet.

3.2.2 Genomförande av intervjuerna

Inför intervjun gjordes ett urval av fyra elever, det vill säga de elever som hade bäst resultat på båda delarna av enkäten och ville medverka. Avsikten med intervjuerna är att tolka elevernas sätt att tänka vid multiplikation, därför ansågs dessa vara lämpliga. Intervjuerna skapade förståelse av det problematik som jag studerar. Intervjuformen som jag valde var delvis strukturerad. Det delvis strukturerade intervjuformen gav mig möjlighet att med hjälp av stickord och ett antal förbereda frågor föra en diskussion med eleven utan att behöva tänka på ordningsföljden (Andersen, 1998). Vid redovisning av intervjumaterialet använde jag mig av fiktiva namn.

4 Resultat

4.1 Enkäter

Totalt genomförde 3 killar och 29 tjejer enkäten, 13 elever på samhällsvetenskapliga programmet och 19 elever på omvårdnadsprogrammet. Resultatet av antal rätt svar på del 1 och del 2 är för samtliga elever som fullföljde enkäten redovisas i tabell 1. Jämförelse mellan de två programmen redovisas i tabell 2 och 3. Redovisningen i lådagrammen är uppdelat i fyra diagram där de första två visar resultatet av del 1 och del 2 för omvårdnadsprogrammet. Diagram 3 och 4 visar resultatet för samhällsvetenskapliga programmet. Tabellerna är utgångspunkten för diagrammen. För att redovisa materialet i lådagram måste materialet vara storleksordnat och därför kan inte resultatet av båda delarna av enkäten från den enskilde eleven redovisas där, utan tabellerna åskådlig gör det istället. Diagrammen kommer däremot att åskådliggöra variationen i de svar som eleverna har angivit i de olika delarna av enkäten.

Undersökningen visar att eleverna hade svårast med åttans tabell. De eleverna som hade fel på åttans tabell hade oftast svårigheterna med sjuans och nians tabell också. Enstaka elever hade svårigheterna med sexans tabell. Av de eleverna som hade ett eller flera fel på del 2 av enkäten, hade *mest* bekymmer med faktoriseringen av produkterna mellan 40 och 60. Enstaka elever hade även svårigheterna med att hitta faktorer till produkterna mellan 30 och 40 liksom mellan 60-80, men inte lika stor utsträckning som mellan 40 och 60.

Tabell 1, tillhör diagram 1: Resultat av enkäten för hela populationen

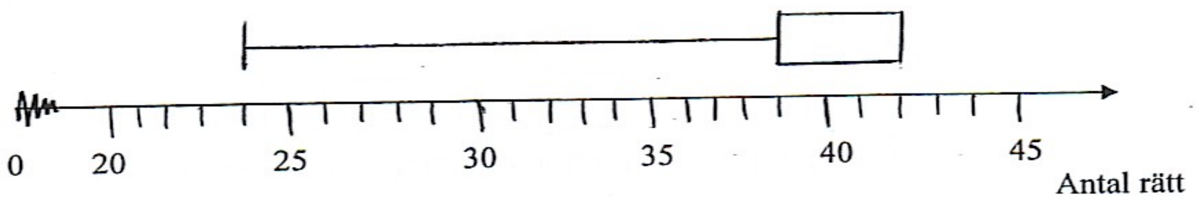
Del 1, max 42p	Del 2, max 25p	Del 1, max 42p	Del 2, max 25p	Del 1, max 42p	Del 2, max 25p	Del 1, max 42p	Del 2, max 25p
42	25	36	22	36	13	42	25
39	22	36	18	40	19	42	25
37	22	35	23	42	25	42	22
37	14	42	23	42	25	41	17
42	15	40	25	42	25	24	16
42	22	42	25	42	25	40	21
41	22	42	24	42	20	42	25
40	23	39	9	39	18	34	16
Antal:							**32**

Tabell 2:tillhör diagram 1 och 2, Omvårdnadsprogrammet

Del 1	*Del 2*
42	23
40	25
42	25
42	24
39	9
40	13
40	19
42	25
42	25
42	25
42	20
39	18
42	25
42	25
41	17
24	16
40	21
42	25
37	15
Antal:	**19**

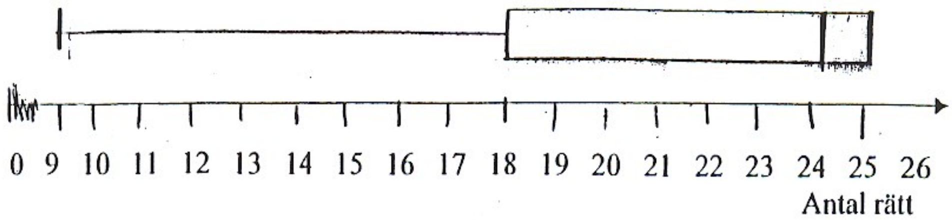
Tabell 3: tillhör diagram 3 och 4, Samhällsvetenskapliga programmet

Del 1	**Del 2**
42	25
34	16
39	22
37	22
37	14
42	15
42	22
41	22
40	23
36	22
37	18
35	23
42	23
Antal:	***13***



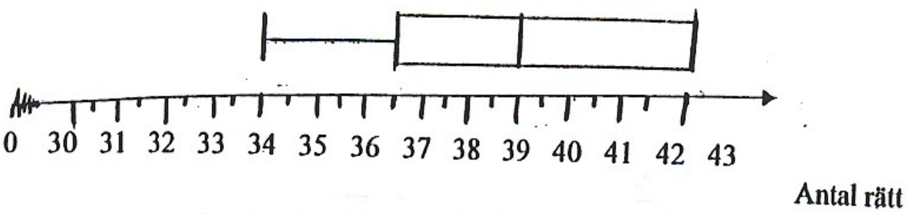
Figur 1, Diagram 1: Del 1, Omvårdnadsprogrammet

Median: 42
Övre kvartil: 39
Nedre kvartil: 42
Högsta värdet: 42
Lägsta värdet: 24



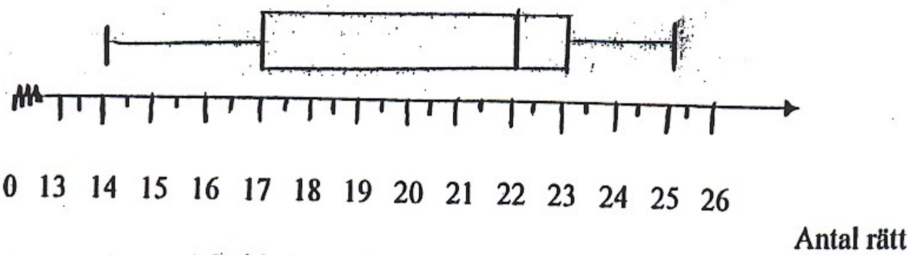
Figur 2, Diagram 2: Del 2, Omvårdnadsprogrammet

Median: 24
Övre kvartil: 18
Nedre kvartil: 25
Högsta värdet: 25
Lägsta värdet: 9



Figur 3, Diagram 3: Del 1, Samhällsvetenskapliga programmet

Median: 39
Övre kvartil: 36,5
Nedre kvartil: 42
Högsta värdet: 42
Lägsta värdet: 34



Figur 4, Diagram 4: Del 2, Samhällsvetenskapliga programmet

Median: 22
Övre kvartil: 17
Nedre kvartil: 23
Högsta värdet: 25
Lägsta värdet: 14

4.1.1 Tolkning av tabellerna och diagrammen

Diagram 1 visar resultatet av enkäten som eleverna på omvårdnadsprogrammet har gjort. Lådagrammet visar att kvartilavståndet är 3, medan variationsbredden är 18. Det lägsta antal rätt som en av eleverna hade på del 1 på omvårdnadsprogrammet var 24. Det skiljer sig mycket från det lägsta till det högsta antal rätt i del 1. Tittar vi på diagram 2 som visar resultatet av del 2 för omvårdnadsprogrammet så är kvartilavståndet något större, det vill säga att antalet rätt är 7. Variationsbredden är 16 antal rätt. Det på grund av att det lägsta antal rätt som en av eleverna hade på del 2 var 9. Med andra ord presterar eleverna bättre på del 1 än del 2. Det kan tolkas som att dessa elever har sämre förståelse då det gäller att dela upp ett heltal i faktorer. Vilket i sin tur kan tolkas som att eleverna har inte tillräckligt med förståelse för multiplikation, men ändå goda kunskaper i multiplikationstabellen. Det finns några elever på omvårdnadsprogrammet som hade alla rätt på del 2 med några felaktiga svar på del 1, om det betyder att eleverna hade svarat fel av en slump eller om de verkligen inte kunde ge ett korrekt svar, vet jag inte. Det var 37 procent elever som läste på omvårdnadsprogrammet som hade alla rätt på båda delarna av enkäten, medan det var 31 procent av eleverna som läste samhällsvetenskapliga programmet som hade alla rätt på båda delarna. Vilket säger oss att det var fler elever på omvårdnadsprogrammet som hade alla rätt på båda delarna jämfört med eleverna på samhällsvetenskapliga programmet. Alltså har inte eleverna på omvårdnadsprogram i det stora hela presterat ett sämre resultat än eleverna på samhällsvetenskapliga programmet.

Diagram 3 visar samhällselevernas resultat av del 1. Det lägsta antal poäng som en av eleverna hade var 34 det ger en variationsbredd på är 8 antal rätt svar. Kvartilavstånd är 5,5 antal rätt svar på del 1 av enkäten. I diagram 4 kan vi se att det lägsta antalet rätt på del 2 bland dessa elever var 14. Det ger en variationsbredd på 11 antal rätt. Kvartilavståndet är 6 antal rätt svar. Det vill säga att eleverna på samhällsvetenskapliga programmet behärskar båda delarna i samma omfattning, dock inte med lika gott resultat som eleverna på omvårdnadsprogrammet. I en jämförelse av diagrammen mellan samhällsvetenskapliga programmet och omvårdnadsprogrammet, indikerar resultaten på att samhällseleverna presterar ett mer jämnare resultat på båda delarna av enkäten jämfört med eleverna på omvårdnadsprogrammet som har presterat bättre på del 1 än del 2, men med fler elever som har alla rätt på båda delarna av enkäten. De samband som finns mellan dessa två program är att eleverna presterar bra på del 1 medan det finns skillnader på prestation av del 2 mellan programmen. Eleverna på omvårdnadsprogrammet visar resultaten att de har bättre förståelse för multiplikationstabellen, eftersom resultatet av del 2 visade sig vara bättre jämfört med eleverna på samhällsvetenskapliga programmet.

Totalt sätt var det 37,5 procent av hela populationen som hade alla rätt på båda delarna av enkäten. Det var 57 procent av eleverna som hade inga fel eller max två fel på del 1. Tittar vi på del 2, var det 57 procent av eleverna som hade inga fel eller max två fel. Självklart finns det elever som hade mer avvikande resultat än andra. Undersökningen visar inte att någon av grupperna skulle vara bättre än den andra.

4.2 Intervjuer

Intervjuerna genomfördes med totalt 4 elever varv två elever från samhällsvetenskapliga programmet och två från omvårdnadsprogrammet. Var och en av intervjuerna tog cirka 10 minuter och gemomfördes då eleverna hade möjlighet till. De frågor och samtalet som pågick mellan mig och intervjupersonerna finns redovisades nedan.

Anna 17 år, Samhällsvetenskapliga programmet

Jag: Finns det något speciellt sätt som du tänker på när du multiplicerar?

Anna: Vissa grejer är intryckta i huvet sen man gick i grundskolan, ett gånger ett är ett, och så enkelt är det. Sådan grejer som man är lite osäker på …typ, typ 6 gånger 7, kan man inte tänka ut så tar man typ 7 gånger 5 lägger ihop och sen lägger på 7. Så det blir lite lättare att tänka. Så brukar jag göra.

Jag: Så du tar det du känner igen som det är lägre…

Anna: Ja, det som är både lägre och högre om det är något högre tal.

Jag: Hur tänkte du här, 7gånger 8, 54

Anna: Hm… jag vet inte jag tror jag tänkte först 6 gånger 7 det är 42 och sen skulle jag lägga på, och så blev det konstigt.

Jag: På andra sida står det att man ska faktorisera, tyckte du att det svårare att göra åt andra hållet?

Anna: Ja det var det, för att det har jag aldrig gjort innan. Så det var lite svårare på det viset men det var kul. Det var en ny grej att testa på. Det var lättare än vad jag trodde.

Jag: Kände du igen talen från uppgift 1, (jag vände på bladet).

Anna: Ja vissa så, men vissa så kände jag inte alls igen.

Jag: Kommer du ihåg hur du läste in multiplikationen om det var på något speciellt sätt? Hur har du lärt dig in den?

Anna: Det var mer att man skulle träna och man skulle räkna så… 5, 10, 15, 20, 25 , så var det på femmas och på nians skulle man göra något konstigt med fingrarna som jag inte kommer ihåg nu.

Jag: Ok.

Anna: 10 är med lätt och, det är mest som jag har rabblat det många gånger på olika vis. Det är mest genom rabbel som jag har lärt mig det genom.

Jag: Använder du dig väldigt ofta av miniräknaren när du ska multiplicera?

Anna: Ja det göra jag, det är av lathet. När man har möjlighet att använda miniräknare så som vi har det inne på matten, använder vi de jättemycket. Mer än vad man egentligen behöver.

Marcus 17 år, Samhällsvetenskapliga programmet

Jag: Finns det något speciellt sätt som du tänker på när du multiplicerar?

Marcus: Det är inlärt. Jag har lärt in det sen jag var liten och sen har jag en snabbhet som jag har fått genom när jag spelat schack. Så jag har tränat upp min logik och sånt fruktansvärt mycket.

Jag: Ok.

Marcus: Jag är fruktansvärt snabb när det gäller sånt, när det är gånger och plus och sånt.

Jag: Är de så att du bara rabblar upp det eller finns det något system som du har?

Marcus: Det är både och, det varierar faktiskt. Det beror på vilken tabell det är.

Jag: …7 gånger 8, har du något speciellt system där?

Marcus: Nej, det kan jag utan det, och det finns speciell anledning till det. Det är fotografiskt minne det handlar om där.

Jag: Finns det något exempel som du kan ge?

Marcus: När det är sjuans och åttans som det är, där är liksom det är, det bara sitter där. Det är bara till att skriva det i princip utan till.

Jag: Ok.

Marcus: Sen när det är typ elvan och de, kan man bara titta… de har jag inte börjat räkna med förrän nian, det är typ bara att titta 3 gånger 11 och skriva av och det blir ju som ett system.

Jag: Ok, nians tabell, är det något speciellt sätt som du tänkte på där eller är det fotografiskt minne?

Marcus: Ja, det är fotografiskt minne där.

Jag: På baksidan var det ju faktorisering, var det något svårare moment jämför med det som var i del 1?

Marcus: Jo lite svårare var det faktiskt,

Jag: Har du under tiden tänkt på att det kan finnas fler än ett rätt svar?

Marcus: Jo jag tänkte det men jag skriver bara ett.

Jag: Är det något speciellt sätt som du tänkte på där?

Marcus: Nej, inte direkt ja tänkte på de som jag satt och klurade på lite… jag tänkte lite division…54 genom 9.

Jag: När lärde du dig multiplikationstabellen?

Marcus: Vi började med det när jag gick i tvåan tror jag .

Jag: Använder du miniräknaren ofta när du multiplicerar?

Marcus: Mm…

Jag: Även när det är enklare tal?

Marcus: Ja, kvittar om det är plus, minus… jag använder miniräknaren.

Jag: Tycker du att det hjälper att använda miniräknaren till att lättare klara av exempelvis det här testet?

Marcus: Det blir ju svårare när man ska skriva så… miniräknaren är av ren lathet man använder.

Mia 17 år, Omvårdnadsprogrammet

Jag: Finns det något speciell sätt som du tänker på när du multiplicerar?

Mia: Nej… Kan man inte det i huvudet så räknar man på fingrarna.

Jag: Hur räknar du då på fingrarna?

Mia: Exempelvis tre gånger 3, så tar man tre och sen tre och sen tre (hon visar tre fingrar uppe),

Jag: Så du tar plus mellan dessa… tre plus tre plus tre?

Mia: Ja

Jag: Har du haft svårt att lära dig multiplikationstabellen?

Mia: Ja, men jag och mamma tragglade in och på så sätt fick jag lära mig

Jag: Så det var bara att läs in om och om igen?

Mia: Ja, och så köpte hon (mamman) något spel som, som, som hade olika nummer som man skulle para ihop.

Jag: Intressant, När lärde du dig den?

Mia: … i trean fyran kanske.

Jag: Hela då till elvan?

Mia: Ja

Jag: Har del 1 eller del 2 varit lättare?

Mia: Jag tycket nästan del 2 var lättare.

Jag: Du hade då inga svårigheter att se att 72 är 8 gånge 9?

Mia: Det var svårt, då fick man tänka efter vad man kunde gångra med varandra för att det skulle bli det.

Jag: Så det tog lite längre tid?

Mia: Ja med sådana lite svårare tal, men som exempel 25 då är det 5 gånger 5, är det lätt.

Jag: Finns det något annat sätt som du försöker komma ihåg någons tabell exempelvis femmans eller nians?

Mia: Oftast så tänker man bara men det finns ett knep. Vid exempelvis 3 gånger 9 (hon håller uppe nio fingrar), det blir 27, det är 20 och sen 7.

Jag: Så du räknar på fingrarna där med?

Mia: Ja man böjer ner det fingret som man gångrar med (hon böjde det tredje fingret på vänster handen)

Elin 16 år, Omvårdnadsprogrammet

Jag: Tycker du att del 1 var svårare eller lättare jämfört med del 2?

Elin: Jag tycket att … det var mer repetition

Jag: På del 1?

Elin: Mm…så jag tycket att det var lättare

Jag: Finns det något speciellt sätt som du tänkte på när du multiplicerar?

Elin: Nej, egentligen inte.

Jag: Hur har du lärt dig den?

Elin: Jag hat övat och övat och övat.

Jag: Har du inga speciella knep för att du ska komma ihåg det?

Elin: Man lär sig och så sitter det.

Jag: Är det någons tabell som är svårare?

Elin: Alla är lika svåra

Jag: Hade du några svårigheter med del 2? Tog det längre tid?

Elin: Nej, egentligen inte, för att jag har hela tabellen upp i huvet.

Jag: Ok.

Elin: Jag kan se det framför mig

Jag: Har du haft svårigheter med att lära dig multiplikationstabellen?

Elin: Nej

Jag: Använder du dig ofta av miniräknaren?

Elin: Nej asså, ja när det är högre tal.

Jag: Inte som typ 3 gånger 3?

Elin: Nej, aldrig, det känns som att man har det i huvudet

Jag: Är det någon form av fotografiskt minne som du har?

Elin: Ja, jag tror det faktiskt.

4.2.1 Tolkning av intervjuerna

Intervjun visar på att eleverna har olika sätt att lära sig produkten av två heltal. Tillvägagångssätten varierar från person till person. Det finns inget som antyder på att det ena sättet är bättre än det andra. Inlärningen av multiplikationstabellen har gått till på liknande sätt hos de intervjuade personerna. De har lärt sig multiplikationstabellen i skolan genom repetition. Intervjuerna visar också på att del 2 uppfattas svårare än del 1, även om personerna har haft alla rätt på båda delarna av enkäten. Del 1 uppfattades som repetition och av den orsaken lättare. Tre av eleverna använder sig av miniräknaren vid enklare multiplikation mellan två heltal, på grund av den konstant tillgången till miniräknaren. Vilket kan tolkas som att eleverna hellre använder miniräknaren än förlitar sig på de kunskaperna de redan. Intervjupersonerna vid namnet Marcus och Elin använder sig av det eidetiskt minne för att komma ihåg produkten.

Ur intervjun med Marcus:

> **Jag**: …7 gånger 8, har du något speciellt system där?
>
> **Marcus**: Nej, det kan jag utan till, och det finns speciell anledning till det. Det är fotografiskt minne det handlar om där.

Ur intervjun med Elin:

> **Jag**: Använder du dig ofta av miniräknaren?
>
> **Elin**: Nej asså, ja när det är högre tal.
>
> **Jag**: Inte som typ 3 gånger 3?
>
> **Elin**: Nej, aldrig, det känns som att man har det i huvudet
>
> **Jag**: Är det någon form av fotografiskt minne som du har?
>
> **Elin**: Ja, jag tror det faktiskt.

Under intervjun framgick det att två av elever hade det lättare vid genomförande av del 2. Det finns inget i enkäten som tyder på att dessa två eleverna hade det lättare vid genomförandet av del 2. Eleverna hade möjligheten att skriva fler än ett alternativ på del 2 men ingen av dessa gjorde det. Om detta innebär att de är duktigare på multiplikation än de andra två intervjupersonerna vet jag inte. Alla fyra intervjupersonerna hade lika många rätt på båda delarna av enkäten.

Intervjupersonen vid namnet Mia använder sig av det sättet som författarna Sherin och Fuson (2005) kallar *pattern-based* strategin, det vill säga den strategis som handlar om att eleverna upptäcker olika mönster vid framtagande av produkten.

Ur intervjun:

> **Mia**: Oftast så tänker man bara, men det finns ett knep. Vid exempelvis 3 gånger 9 (hon håller uppe nio fingrar), det blir 27, det är 20 och sen 7.
>
> **Jag**: Så du räknar på fingrarna där med?
>
> **Mia**: Ja man böjer ner det fingret som man gångrar med (hon böjde det tredje fingret på vänster handen)

Först förstod jag inte riktigt vad Mia menade men så småningom listade jag ut att talen på den högra handen representerar tiotalen och den vänstra handen entalen. Alltså det böjda fingret representerar det mellanrummet mellan entalen och tiotalen. I intervjun framgick det att Mia inte har haft det lätt att lära sig multiplikationstabellen och antagligen har hon lärt sig att detta sätt fungerar bra då hon ska komma ihåg nians tabell.

Eleven vid namnet Anna använder sig av strategin vid namnet *hybrid*. Det vill säga att personen i frågan kombinerar två olika metoder för att komma fram till produkten.

Ur intervjun:

> **Anna**: Vissa grejer är intryckta i huvet sen man gick i grundskolan, ett gånger ett är ett, och så enkelt är det. Sådan grejer som man är lite osäker på …typ, typ 6 gånger 7, kan man inte tänka ut så tar man typ 7 gånger 5 lägger ihop och sen lägger på 7. Så det blir lite lättare att tänka. Så brukar jag göra.

Eleverna använder sig även av *learned products*, eftersom vissa produkter är inlärda från början, precis som Anna nämner. Det framgår även att eleverna använder sig av den metoden som kallas för *Count-by*. Det vill säga genom olika ramsor med olika kombinationer av tal lär sig eleverna produkten.

Ur intervjun:

> **Anna**: Det var mer att man skulle träna och man skulle räkna så… 5, 10, 15, 20, 25 , så var det på femmas och på nians skulle man göra något konstigt med fingrarna som jag inte kommer ihåg nu.

5 Diskussion

Jag började uppsats med att ställa mig följande frågeställningar:

- *Vilka strategier använder sig eleverna av för att lära sig produkten av två heltal?*
- *Finns det något samband mellan kunskaperna i multiplikationstabellen och faktoriseringen av ett heltal?*
    - *Vilka delar av multiplikationstabellen har eleverna svårigheterna med?*

Under detta kapitel kommer jag att diskutera dessa frågeställningar utifrån de litteratur-studierna som har gjort och resultatet. Därefter diskuteras val av metod, kritik till arbetet och förslag till fortsatt forskning.

5.1 Vilka strategier använder sig eleverna av för att lära sig produkten av två heltal?

I grundskolan börjar eleverna lära sig multiplikationstabellen. På vilket sätt har eleverna lärt sig den varierar från elev till elev. Det har jag tagit fasta på genom den empiriska studien. Precis som Fäldt (1997) har konstaterat tror jag också att det är svårt att studera inlärning utifrån eftersom det är en inre process. Därför är det intressant att studera resultatet av och sambanden kring inlärning. Om jag ska säga att en person har lärt sig någonting måste förändringen vara bestående. För mig har det inte varit möjligt att ta fasta på om inlärningen av multiplikationstabellen har varit bestående eftersom jag har studerat den nuvarande kunskapen hos eleverna. Min tanke kring detta är att om eleverna inte repeterar multiplikationstabellen kommer kunskapen i den att gå förlorad så småningom.

Den grundtanken som de flesta elever har om multiplikation är att det handlar om upprepad addition. Eftersom i de flesta fall har multiplikation mellan två heltal introducerats som upp-repad addition, under skoltiden. Antagligen för att eleverna kan lätt relatera till de kunskaperna i addition. Det finns dock olika metoder för att komma ihåg produkten av två heltal. Intervjuerna visar att den mest förekommande metoden är då eleverna lägger till ett tal till den redan kända produkten med hjälp av fingrarna. En del elever har lärt sig multiplikationstabellen genom att memorera produkten av två heltal utan något speciellt sätt att göra det på.

Sherin och Fuson (2005) sammanfattar sina tankar kring elevernas sätt att tänka vid utförandet av multiplikation av två heltal i kapitel 2.8. Det som intervjupersonerna berättade om hur de kommer ihåg produkten ingriper med författarnas tankar. Hur vi människor ser på exempelvis ett tal kan vara olika. När eleverna betraktar exempelvis talet 32 som en produkt av två heltals faktorer är den meningsfulla kunskapen uppnådd. Vid inlärning av multiplikation strävas det efter att eleverna ska se på ett tal som en relation mellan två andra tal. På så vis vet jag att eleverna har tagit fasta på den kunskapen och inte bara memorera svaret utan att reflektera. Om inlärning inte leder till proceptuellttänkande kommer den att leder till inlärning utan reflektion, ytinlärning, glömska och slutligen försvagas kunskaper i och om multiplikationstabellen. Precis som Kilborn (1979), kom fram till att förståelsen är en del av inlärningen av multiplikationstabellen, har jag med kommit fram till att det handlar inte om de olika strategierna som eleverna har för att komma fram till produkten av två heltal. Det handlar istället om förståelsen och innebörden av multiplikation som räknesätt liksom förståelsen och innebörden av faktorisering av ett heltal. Det handlar om att lära sig multiplikationstabellen med förståelse, förtrogenhet, fakta och färdighet. Med stöd av litteraturen har jag kommit fram till att det är via kognitivinlärningen som eleverna lär sig bäst multiplikationstabellen där problemlösning är ett av sätten. Målet med att lära sig multiplikationstabellen är dels att förstå den, dels att kunna lära sig den utantill.

5.2 Finns det något samband mellan kunskaperna i multiplikations-tabellen och faktoriseringen av ett heltal?

Eleverna med goda kunskaper i multiplikationstabellen bör ha stort förståelse för uppdelning av ett heltal i faktorer. De samband som finns mellan multiplikationstabellen och att kunna faktorisera ett tal är att de är varandras motsatser. Som författarna Gray och Tall (1994) liksom jag tror att den meningsfulla förståelse för multiplikationstabell nås genom att läraren utifrån innebörden av begreppen concept och procept undervisar. Det vill säga då eleverna kan uppfattar ett heltal som produkt av två heltal. När eleverna har insikt i det är förståelsen för multiplikation som räknesättet nådd, anser jag. Därför var det viktigt för mig att studera sambandet mellan multiplikationstabell och faktorisering. De sambanden som finns mellan multiplikation och faktorisering som gäller för min population är att eleverna har en aning bättre kunskaper i multiplikationstabell än faktorisering. Undersökning visar att eleverna hade svårast med åttans tabell, sjuans, nians och några enstaka hade problem med sexans tabell. Eleverna hade svårast med att faktorisera talen mellan 40 och 60. Alltså hade eleverna svårigheterna med *svåra* faktorer som ger produkten mellan 36-81, så som Sherin och Fuson (2005) uttrycker sig. Således de eleverna som inte klarar av att multiplikationstabellen klarar inte heller av att faktorisera. Eftersom eleverna i undersökningen hade mest bekymmer med att faktorisera produkter mellan 40 och 60, innebär det att eleverna hade även problem med multiplikationstabellen som innesluter talen 6, 7, 8 och 9. Precis som det framgick i intervjun med eleven vid namnet Anna, tror jag att flera av elever har inte kommit i kontakt eller fått det reda på innebörden av faktorisering. Det har bland annat visat sig genom att eleverna i min undersökning efterfrågade förklaringen till vad faktorisering är trots gymnasieutbildningen. Vilket i sin tur leder till att eleverna använder sig oftare av miniräknaren vid enkla uträkningar, vilket också kom fram under intervjun.

Att resultatet av enkäten mellan två program skiljdes åt, var väntat. Det som förvånar mig är att ett teoretiskt orienterad program SP hade sämre resultat trots större erfarenheten av ämnet. Vad det kan bero på kan jag bara spekulera i. En trolig orsak till det kan vara att användandet av miniräknaren ökar då eleverna börjar med något avancerade uträkningar i kursen, matematik B. En annan möjlig orsak är att eleverna på omvårdnadsprogrammen disponerar samma antal timmar under lägre period. Den slutsatsen som jag kan dra utifrån min undersökning är att kunskaperna i och om multiplikation, när det gäller hela populationen, är goda. Det jag inte hade väntat mig är att eleverna på omvårdnadsprogrammet skulle prestera så bra som de har gjort. Det på grund av att programmet är yrkesinritat. Det är inte meningen att jag ska dra några slutsatser om hur duktiga elever är på multiplikation. För att den kunskapen kan visa sig genom hur bra eleverna kan dela upp ett heltal i faktorer. Jag tror om eleverna redan från början är införstådda med att resultatet vid multiplikation kallas för produkt och att produkten består av faktorer, skulle eleverna få större förståelse vid inlärning av multiplikationstabellen. Det skulle leda till att resultatet i båda delarna av enkäten skulle vart likvärdiga. Det skulle gynna elevernas förståelse för multiplikation om de lärde sig innebörden av faktorisering.

5.3 Metoddiskussion och kritik till arbetet

Syftet med studien var att undersöka vilken eller vilka strategier gymnasieelever använder sig av vid multiplikation mellan två heltalsfaktorer samt ta reda på vilka samband det finns mellan kunskaperna i multiplikation och faktorisering. I mitt val av metod har jag använt mig av enkäter som underlag för intervjuer. Jag har fått större förståelse och insikt i hur en elev tänker vid multiplikation av två heltal, vilket var målsättningen. Med denna val av metod har jag koncentrerat mig på tolkningen av intervjuerna liksom resultatet av enkäterna. Med tanke på syftet anser jag att mitt val av metod var korrekt.

Det finns ett antal andra faktorer som jag borde ha tänkt på innan jag genomförde den empiriska delen. Det ena är att använda ett annat ord istället för faktorisering. Jag antog att eleverna var välbekanta med begreppet men det var de inte. Det andra är att tiden för intervjuerna borde ha varit mycket längre. Med tanke på att jag var intresserad av att tolka deras livsvärld så räcker inte de 10 minuterna som jag hade avsatt. Med tanke på syftet hade det varit bättre om jag valde att intervjua eleverna som hade blandade prestationer vid enkäten. Jag skulle kunna ha fått in mer varierande svar och strategier från eleverna. Det skulle även ha gett mig möjligheten till att undersöka svårigheterna med att lära sig multiplikationstabellen och inte bara titta på hur eleverna kommer ihåg produkten. Hur resultatet av detta hade varit vet jag inte, men jag tror att den hade varit mer varierande än vad det är nu.

Insamlingen av data har delvis varit genom intervjuer och delvis genom enkäter. Det har gjort att trovärdigheten för metoden är känslig, på grund av att den kvalitativa delen av metoden kan tolkas på olika sätt av olika personer. Jag har strävat att vara så objektiv som möjligt i min tolkning av resultatet. Att kunna dra några generella slutsatser har jag inte haft möjlighet att genomföra vad det gäller den kvantitativa metoden. Antalet enkäter borde ha genomförts i större utsträckning vid en sådan jämförelse av resultat.

Under arbetets gång har jag stött på diverse forskningsrapporter om elevernas svårigheter i matematik. Skolverket och andra myndigheter är införstådda med den problematiken som finns och kan uppstå inom undervisningen i matematik. Det som har varit krävande är att hålla sig innanför de valda avgränsningarna för uppsatsen. Vilket betyder att möjligheten till fortsätta forskning inom detta område är stort. Frågeställningar i uppsatsen skulle kunna vara förarbete till att kunna besvara följande problemställningar:

- *Är kunskaperna i multiplikationstabell bestående?*

Med det val av metod som jag valde har det inte varit möjligt att besvara frågeställningen, men jag har haft denna frågeställning i baktanken. Multiplikationstabellen kan sen som livslångt lärande eftersom den följer oss under hela studietiden och den är även användbar i vardagen.

6 Sammanfattning

Matematik är ett stort ämne och den omfattar olika delar (pusselbitar), en av delarna är multiplikationstabellen. Uppsatsen beskriver elevernas olika sätt att komma ihåg produkten av två heltal. Alla har vi olika förutsättningar för att lära oss saker. Att eleverna har olika strategier för att komma ihåg produkten av två heltal är förståligt. Det är viktigt att eleverna tidigt kommer i kontakt med problemlösning. Undersökningen visar att elever som har mindre kunskaper i multiplikationstabell hade också problem med faktorisering av ett heltal. Bland de eleverna som hade ett eller fler fel på del 1 hade de svårigheterna med att hitta produkten som hade 6, 7, 8 eller 9 som en av faktorerna. De elever som hade problem med att hitta produkten i del 1 hade också problem med att hitta faktorer till samma produkt eller produkter i del 2. Då eleverna kan se ett tal som produkten av två tal är den meningsfulla kunskapen vunnen. Om eleverna inte använder sig av multiplikationstabellen eller repeterar den tillräckligt ofta kommer kunskaperna vara förlorade. Då kommer eleverna enbart att se multiplikationen mellan två tal som koncept och det i sin tur skulle leda till att eleverna så småningom förtränger produkten av två heltal. Det skulle innebära att inlärningen har skett på ytan, vilket så småningom skulle leda till glömska liksom försämrade kunskaperna i multiplikation. Alltså är det viktigt att eleverna lär sig att vid multiplikation kallas resultatet för produkt och att produkten består av faktorer, det vill säga lära sig multiplikationstabellen med förståelse. Det är meningen att eleverna till en början ska memorera multiplikationstabellen dels för att produkten av $8 \cdot 6$ ska komma direkt utan någon reflektion, dels för att förståelsen av multiplikationstabellen kommer därefter. Målet med multiplikationstabellen är eleverna ska ha förståelse i den och även kunna läsa upp snabbt den utan eftertanke. Då eleverna inte har goda kunskaper i multiplikationstabellen kommer konsekvenserna av det att visa sig genom dåliga resultat. Multiplikationstabellen är en del av pusslet, där alla bitarna ska vara på plats för att eleven ska uppfylla de krav som ställs.

7 Referenser

Andersen Ib (1998), *Den uppenbara verkligheten, val av samhällsvetenskaplig metod*, Lund, Studentlitteratur, sid. 31

Backman Jarl (1998), *Rapporter och uppsatser*, Studentlitteratur, Lund

Dahl Kristin (1991), *Den fantastiska matematiken, Stockholm*, T. Fischer & Co. sid 42

Fäldt Christer (1997), *Lärobok i psykologi*, Kristianstad, Gleerups, sid. 76-106

Gamstedt Bengt (1993), *Om att handskas med tal*, Utbildningsmaterial för grundskollärarlinjen 1-10p, Malmö, sid. 6-8

Gray Eddie M. och Tall David O. (1994), *Dualty, Ambiguity and Flexibility: A Procedual View of Simple Arithmetic*, The journal för research in mathematics education, 26 (2), 115-141, 1994, University of Warwick, UK

Harnasz Costel (1994), *Teaching Mathematics*, London, Routledge, sid. 137-142

Johansson Bengt, Kilborn Wiggo (1982), *Räkning, lärarandledning med matriser och facit till diagnoser*, Stockholm, Liber Utbildningsförlaget, sid. 39-41

Kilborn Wigo (2003), *Synen på baskunskaper i ett tidsperspektiv*, Kapitel 2 i *Baskunnande i matematik*, Myndigheter för skolutveckling, 2003, Stockholm, Dreamforce Infomedia AB, sid. 50-55

Kilborn Wiggo (1997), *Didaktisk ämnesteori i matematik, del 1 Grundläggande aritmetik*, Malmö, Liber Ekonomi, sid. 76-94

Kilborn Wiggo (1995), *Didaktisk ämnesteori i matematik, del 2 Rationella och irrationella tal, Malmö*, Liber Hermods AB, sid. 14-17

Kilborn Wiggo (1979), *PUMP-projektet, Bakgrund och erfarenheter*, FoU-Rapport 37, Göteborg, Liber Utbildnings Förlaget, sid. 27, 49

Kvale Steinar (1997), *Den kvalitativa forskningsintervjun*, Lund, Studentlitteratur, sid. 87-105

Marton Frence och Booth Shieley (2000), *Om lärande*, Lund, Studentlitteratur,
sid. 15

Mouwitz Lars, Emanuelsson Göran och Johansson Bengt (2003), *Vad menas med baskunnande i mattematik?* Kapitel 1 i *Baskunnande i matematik*, Myndigheter för skolutveckling, 2003, Stockholm, Dreamforce Infomedia AB, sid. 20-26

Nystedt Lars (1993), På tal om tal, *En läsebok i matematik*, Uppsala, Instant matematics, sid.34

Nunes Terezinha och Bryant Peter (1996), *Children doing mathematics*, Oxford, Blackwell, Publishers Ltd., sid. 144-145

Patel Runa och Bo Davidson (2003) 3:e upplaga, *Forskningensmetodikens grunder, Att planera, genomföra och rapportera en undersökning,* Lund, Studentlitteratur, sid. 26-31

Rosengren Karl-Erik och Arvidsson Peter (1992), *Sociologisk metodik,* Stockholm, Amnquistoch Wiksell, i Andersen Ib (1998), *Den uppenbara verkligheten, val av samhällsvetenskaplig metod,* Lund, Studentlitteratur, sid. 169

Sherin Bruce och Fuson Karen (2005), Multiplication *Strategies and the Appropriation of computational resource, Journal for research in Mathematics Educationl,* vol. 36 nr. 4 sid. 347- 395, Evanston, Northwestern University

Sinclair H. och Sinclair A. (1986), *Children´s mastery of written numerals and the construction of basic number concepts,* In Herbert (Ed.) Conceptual and preceptual Knowledge: The Case for mathematics, Hillsdale, N.J:Erlbaum, i Gray Eddie M. och Tall David O. (1994), *Dualty, Ambiguity and Flexibility: A Procedual View of Simple Arithmetic,* The journal för research in mathematics education, 26 (2), 115-141, 1994, University of Warwick, UK.

Stenmark Jean Kerr, Thompson Virginia och Cossey Ruth (1986), *Matte hemma matte i skolan*, -Family math i svensk version, Lund, Studentlitteratur, Sid. 188

Sterner Görel och Lundberg Ingemar (2004), *NCM-Rapport 2002:2, Läs och skrivsvårigheterna och lärande i matematik,* Göteborg, Grafikerna Livréna i Kungälv AB, sid. 24, 67-80, 137-147

Svenning Conny (2000), *Metodboken, Samhällsvetenskaplig metod och metodutveckling, Klassiska och nya metoder i IT-samhälle,* Eslöv, Lorentz förlag, sid. 93-107

Säljö Roger (2000), *Lärande i praktiken,* Stockholm, Prisma, sid.11-27

Thompson Jan (1991), *Matematik Lexikon*, Falun, Wahlström och Widstrands

Unenge Jan, Sandahl Anita och Wyndhamn Jan (1994), *Lära matematik, Om grundskolans matematikundervisning,* Lund, Studentlitteratur, sid. 76-80

Utbildningsdepartementet (2001), *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet*, Stockholm, CE Fritzes AB

Utbildningsdepartementet (1994), *1994 års läroplan för de frivilliga skolformerna,* Stockholm, CE Fritzes AB

Internetkällor

Olofsson Gunilla (2003), *Kursproven i matematik kurs A ht 2002 och vt 2003*, Stockholm, Lärarhögskolan i Stockholm, http://64.233.183.104/search?q=cache:f08M6yv_cb4J:www.skolverket.se/content/1/c4/20/08/Kp_04.pdf+Olofsson+Gunilla+(2003),+Kursproven+i+matematik+kurs+A+ht+2002+och+vt+2003,+Stockholm,+&hl=sv, hämtad: 20051114

Skolverket a, *Ämnets syfte och roll i utbildningen*, www.skolverket.se/sb/d/577, hämtad: 20050905

Skolverket b, *Mål i matematik för grundskolan,* http://www3.skolverket.se/ki03/front.aspx?sprak=SV&ar=0506&infotyp=23&skolform=11&id=3873&extraId=2087, hämtad:20051101

Skolverket c, Kursplan Matematik A, http://www3.skolverket.se/ki03/front.aspx?sprak=SV&ar=0506&infotyp=8&skolform=21&id=MA&extraId, hämtad: 20051201

Wijk Evelina, *Får man använda miniräknare i skolan,* www.tidningsskolan.se/article.jsp?articl=6371, hämtad: 20050908

Bilaga 1: Enkät

Tabellkunskap i multiplikation

Ditt namn:____

Din ålder:______________

Kön: ☐ Kille ☐ Tjej

Vilket program läser du? ____________________________________

De följande uppgifterna handlar om multiplikation.

Del 1: Vad blir svaret?

$2\cdot 3=$ ______	$5\cdot 7=$ ______	$2\cdot 2=$ ______
$1\cdot 4=$ ______	$8\cdot 4=$ ______	$3\cdot 7=$ ______
$9\cdot 7=$ ______	$4\cdot 7=$ ______	$4\cdot 4=$ ______
$6\cdot 7=$ ______	$5\cdot 5=$ ______	$3\cdot 5=$ ______
$8\cdot 3=$ ______	$8\cdot 5=$ ______	$6\cdot 6=$ ______
$9\cdot 3=$ ______	$6\cdot 9=$ ______	$5\cdot 6=$ ______
$7\cdot 8=$ ______	$7\cdot 2=$ ______	$4\cdot 5=$ ______
$8\cdot 9=$ ______	$8\cdot 8=$ ______	$3\cdot 4=$ ______
$1\cdot 1=$ ______	$9\cdot 9=$ ______	$4\cdot 2=$ ______
$0\cdot 5=$ ______	$5\cdot 9=$ ______	$3\cdot 3=$ ______
$7\cdot 7=$ ______	$2\cdot 8=$ ______	$6\cdot 3=$ ______
$10\cdot 2=$ ______	$4\cdot 9=$ ______	$4\cdot 6=$ ______
$6\cdot 8=$ ______	$10\cdot 10=$ ______	$2\cdot 6=$ ______
$3\cdot 11=$ ______	$10\cdot 5=$ ______	$5\cdot 2=$ ______

Del 2: Faktorisera, det kan finnas fler än ett rätt svar.

25 = ____________ ____________ ____________ _______

36 = ____________ ____________ ____________ _______

18 = ____________ ____________ ____________ _______

42 = ____________ ____________ ____________ _______

72 = ____________ ____________ ____________ _______

81 = ____________ ____________ ____________ _______

55 = ____________ ____________ ____________ _______

40 = ____________ ____________ ____________ _______

16 = ____________ ____________ ____________ _______

21 = ____________ ____________ ____________ ________

4 = ____________ ____________ ____________ ________

54 = ____________ ____________ ____________ _______

56 = ____________ ____________ ____________ _______

27 = ____

20 = ____

35 = ____

15 = ____

24 = ____

30 = ____

45 = ____

28 = ____

8 = ____

63 = ____

9 = ____

48 = ____