Högskolan Kristianstad

En undersökning om problemlösning och elevers uppfattningar om problemlösning

Marcus Fridström och Markus Ander

Kurs: AAU62L

Handledare: Örjan Hansson

Abstract

Syftet med uppsatsen var att undersöka elevers inställningar till matematik samt deras tillvägagångssätt när de löser matematikuppgifter av olika svårighetsgrad. Undersökningen vi genomfört består av två delar; en enkätundersökning utformad som ett prov och semistrukturerade intervjuer. Resultaten ledde oss till följande slutsatser: motivationen är central för elevernas prestationer i matematik och att problemlösningsorienterad matematikundervisning bör vara kärnan i matematiken då den ger möjligheten till att få en djupare förståelse för matematiken i stort. Denna problemlösning bör vara utan specifika ramar och metoder för att skapa en frimodig och kreativ problemlösare.
Nyckelord: Metakognition, Motivation, Problemlösning, SOLO-taxonomi, Uppfattningar

The purpose of the essay was to study students´ approaches to mathematics and the ways they go about when they solve mathematical problems of shifting difficulty. Our research consists of two parts; one part enquiries in the form of a mathematics test, and also semi structured interviews. The results led us to the following conclusions: motivation is central to students´ accomplishments in mathematics, and problem solving oriented mathematics education ought to be the key content of mathematics since it provides the opportunity to obtain a deeper and more thorough understanding of mathematics in general. This problem solving process should be without specific frames and methods in order to create a free and creative problem solver.
Key words: Attitudes, Metacognition, Motivation, Problem Solving, SOLO-taxonomy

Innehållsförteckning

1. Sammanfattning 5
2. Inledning 6
2.2 Syfte 6
2.3 Frågeställning 6
2.4. Avgränsning 7
3. 3. Forskningsbakgrund 8
3.1 Problemlösning – en historisk tillbakablick 8
3.2 Kursplaner 10
3.3 Vad är problemlösning 11
3.4 Metakognition 12
3.5 Uppfattningar 14
4. Teori. 16
4.1 Teorigrund 16
4.2 SOLO-taxonomin 16
4.3 Konstruktivism 19
5. Litteratursammanfattning 20
6. Metod 21
6.1 Enkäter 21
6.2 Intervjuer 24
6.3 Urval 24
6.4 Etiska överväganden 25
7. Metoddiskussion 25
7.1 Intervjuer 25
7.2 Enkäter 26
7.3 Urval 27
8. Resultat 28
8.1 Sammanställning 28
8.2 Genomgång av intervjuerna 30
8.3 Sammanfattning av intervjuerna 34
8.4 Reflektioner kring enkätsvaren 35
8.5 Genomgång av elevernas enkätsvar fråga för fråga 37
9. Diskussion 41
10. Slutsatser 46

11. Referenslista 48
12. Bilagor 52
12.1 Bilagor: Intervjutranskribering 52
12.2 Intervjumall 55

1. Sammanfattning

Vi har undersökt elevers förhållningssätt gentemot matematik. Detta har vi gjort genom en enkätundersökning som bestod av ett antal frågor kring vinklar och area baserade på SOLO-taxonomin, med andra ord var enkäten uppbyggd som ett matematikprov med en progression i uppgifternas svårighetsgrad. Genom dessa enkäter fick vi svar på frågan hur eleverna räknade samt vad det var som de hade problem med. Dessutom genomförde vi en intervju med några av dessa elever för att få reda på hur de resonerade och tänkte när de löste uppgifterna. Därmed fick vi svar på frågorna:

- Hur reagerar elever när de ska lösa ett matematiskt problem och hur påverkar det deras attityd till att lösa uppgifter i matematik?
- Hur kan man använda SOLO-taxonomin för att förstå hur elever resonerar när de försöker lösa ett matematiskt problem?

Det vi kom fram till är att elevens inställning till matematik är direkt avgörande för elevens benägenhet att försöka använda mer än ett möjligt tillvägagångssätt för att lösa ett problem. Vi märkte att hos de elever där motivation saknades blev resultaten sämre. Utan motivation var det lättaste sättet att handskas med en uppgift att helt enkelt låta bli att göra den. Bland de elever som var motiverade såg vi prov dels på varierade lösningsförslag och dels på en villighet att försöka lösa varenda uppgift. Vi upptäckte att högstadieeleverna hade en hög motivation medan gymnasieklassen i stor utsträckning var omotiverade.

Resultaten visade också tydligt att de enklaste uppgifterna löstes av nästan alla eleverna, men efterhand som uppgifterna blev svårare så blev det allt färre elever som lyckades lösa dem. Det var endast två av 34 elever, båda från högstadieklassen, som lyckades lösa de svåraste uppgifterna på enkäten. Ur det perspektivet var enkäten lyckad, då vi fick fram den önskade progressionen enligt SOLO-taxonomin i uppgifterna.

Vi har kompletterat våra resultat med en litteraturundersökning som behandlar *uppfattningar, problemlösning* och *metakognition.* Denna undersökning har vi ställt mot de resultat vi fått fram, och även gjort kopplingar till relevanta kursplaner i ämnet matematik. Anledningen till detta förfarande är att vi vill visa på vilka attityder och uppfattningar man som lärare kan möta i matematikundervisningen samt ge redskap för att bemöta dessa.

I diskussionsdelen diskuterar vi fördelarna med att integrera problemlösning i matematikämnet, både i förhållande till våra resultat samt forskningsbakgrunden. Vi lyfter även fram elevers uppfattningar inom matematik utifrån tidigare forskning och jämför dessa med våra egna resultat.

2. Inledning

Under våra respektive VFU-perioder i matematik har vi reagerat på elevers attityder till matematikämnet, som väldigt sällan är positiv. Inte så att vi blivit förvånade över att många elever ogillar matematik, det känner såväl vi som många med oss till sedan den egna skoltiden. Det vi blev intresserade av var dock inte ogillandet i sig, utan snarare anledningen till det, alltså vad som ligger bakom elevers syn på och tänkande kring matematik. Vi resonerade att för att kunna gå in på djupet kring elevers resonemang kring matematik behövde vi låta elever räkna ett antal av oss förberedda matematikuppgifter och sedan intervjua ett begränsat antal elever kring dessa enkäter. Genom att göra på detta vis skulle vi dels få veta hur elever kan gå till väga när de löser uppgifter i matematik, och även få ta del av deras resonemang kring räknande och tänkande i matematik. Vår förhoppning var att få klart för oss vad elever kan tycka om matematik, varför de tycker som de gör och även hur de går till väga för att lösa matematiska uppgifter.

2.1 Syfte

Vi vill undersöka hur elever närmar sig och regerar när de stöter på ett problem i matematik. Vad verkar vara svårt respektive lätt? Hur känner de inför matematik? Vi är även intresserade av hur elever resonerar när de löser uppgifter i matematik, och vi undrar om man kan använda SOLO-taxonomin som ett verktyg för att belysa detta för oss. Genom att låta två klasser, en gymnasieklass och en högstadieklass, genomföra en enkätundersökning som består av ett antal matematikuppgifter så vill vi få svar på hur eleverna resonerar när de löser uppgifter i matematik; vilka typer av uppgifter är svåra, hur ser deras beräkningar ut etc. SOLO-taxonomin använder vi för att få en progression i svårighetsgraden på uppgifterna. Genom att intervjua några av dessa elever så vill vi få reda på hur eleverna regerade, tänkte och kände när de arbetade med uppgifterna från enkäten; hur de förhåller sig till enkätuppgifterna, kan de förklara hur de tänkte etc.

2.2 Frågeställning

Våra två huvudfrågor är:

- Hur reagerar elever när de ska lösa ett matematiskt problem och hur påverkar det deras attityd till att lösa uppgifter i matematik?
- Hur kan man använda SOLO-taxonomin för att förstå hur elever resonerar när de försöker lösa ett matematiskt problem

2.3 Avgränsning

Uppsatsens huvudsyfte är inte att göra en jämförande studie mellan gymnasiet och högstadiet. Vi är därför inte intresserade av att bygga studien på en jämförelse, även om vi i ibland ställer de bägge klasserna i relation till varandra. Med andra ord är det *eleven* som är i fokus, och att vi har olika åldrar på våra klasser har i första hand inget jämförande syfte. Vi har valt att begränsa vår undersökning till de matematiska områdena *vinklar* och *areaberäkning*.

3. Forskningsbakgrund

3.1 Problemlösning – en historisk tillbakablick

Alan Schoenfeld (1992) har sammanfattat en överblick över hur man använt problemlösning som didaktisk metod för inlärning från 1800-talet och framåt i USA. Han hänvisar till *Milner* (1897, refererad i Schoenfeld 1992), när han förklarar att man på 1800-talet såg på problemlösning som en sorts inlärningsprocess genom repetition (rutinuppgifter); Lös ut *produkten* av två tal och lär dig att använda denna metod genom att göra 10 uppgifter som är uppbyggda på mer eller mindre samma sätt. *Schoenfeld* (1992) visar på den struktur han menar finns i undervisningen, nämligen följande:

1. En uppgift används för att introducera en teknik.
2. Tekniken illustreras.
3. Fler uppgifter används så att eleverna kan öva på de illustrerade färdigheterna.

Syftet med att använda denna struktur, menar *Schoenfeld*, är att eleven skall fylla på sin ”matematiska verktygslåda” med nya tekniker. Slutligen ska eleven bemästra alla de tekniker som läroplanen kräver. Detta är någonting som även vi har sett under vår skolgång, framförallt i den matematiklitteratur man fått arbeta med under grund- och gymnasieskola.

Även i Tyskland, menar *Reiss* och *Törner* (2007), så var länge problemlösning snarare en del av psykologivetenskapen än ett forskningsämne för matematik, och det tog lång tid innan man började respektera problemlösningsmetodiken som ett tillvägagångssätt för att undervisa i matematik. Senare, fortsätter *Schoenfeld* (1992), på andra halvan av 1900-talet, började man inse värdet av problemlösningsmetodik som ett tillvägagångssätt för att lösa svårare problem. Nu fick eleverna lära sig att arbeta efter vissa problemlösningsmetoder som frekvent användes som tillvägagångssätt för att lösa ett mer avancerat problem. Därmed förpassades problemlösningsmetodiken till ännu en av flera färdigheter och kunskaper som läroplanerna i matematik krävde att eleverna skulle behärska efter avslutad kurs. *Stanic* och *Kilpatrick* (1988, refererad av Schoenfeld 1992) anser dessutom att man använt problemlösning som en motivation och ursäkt; efter att du lärt dig detta moment så kan du lösa denna typ av problem, eller denna typ av problem kommer du att möta i det verkliga livet etc.

Schoenfeld (1992) poängterar i detta sammanhang vikten av att skifta fokus såväl i kursplaner som i undervisningsmetoder. Bort med formelmemorering, upprepningsövningar och memorerandet av tillvägagångssätt i matematikundervisningen. Istället bör man fokusera på att utforska mönster, formulera antaganden och att söka lösningar. Han anser att en sådan fokusförändring dels kommer att öka elevers motivation i matematikämnet, dels få elever att börja se matematik som en vetenskap som handlar om mönster och inte uteslutande om tal. Vi anser också att det vore en positiv riktning för matematikämnet i skolan att koncentrera sig mera på att finna mönster och samband, men samtidigt är det viktigt att repetera och memorera viss typ av kunskap i syftet att skapa sig en kunskapsbas.

Det fanns en syn på problemlösning som hölls av *Stanley* och *Kilpatrick* (1988, refererad av Schoenfeld 1992): att problemlösning är matematikens inre kärna. Men trots att problemlösning fått mer utrymme i matematikämnet så innebär inte det att man har lyckats med att implementera problemlösning i matematikundervisningen, menar *Lesh* och *Zawojewski* (Schoenfeld, 1992, refererad av Lesh & Zawojewski 2007). I deras artikel, som är mer aktuell än *Schoenfelds,* förklarar de att problemlösning som en didaktisk metod i klassrummet mer eller mindre har misslyckats. Vidare så förefaller även forskningen och litteraturen inom problemlösningen ha bidragit lite eller inget alls till skolans praxis. I USA och i andra länder hade man till och med en kort tid efter *Schoenfelds* artikel (1992) gått tillbaka i matematikundervisningen till en mer rutinbaserad undervisning där fokus låg på inlärning av grundläggande begrepp. Vi håller med om tanken på att problemlösning är det som är matematikens ursprung och tror att detta är en viktig del av att förstå matematik, och ser den återgång till rutinbaserade uppgifter som författarna här ovan skriver om som någonting negativt.

Lester (1994) gör en sammanställning av främst sin egen och *Schoenfelds* tidigare forskning och sammanfattar vad som utmärker en framgångsrik problemlösare enligt punkterna nedan:

- Goda problemlösare kan mer än sämre problemlösare och deras kunskap är välstrukturerad och schematisk.
- Goda problemlösare fokuserar på strukturella problem till skillnad från sämre problemlösare som har en tendens att fästa blicken på ytliga problem.
- Goda problemlösare är mer medvetna än sämre problemlösare om sina styrkor och svagheter som problemlösare.
- Goda problemlösare är bättre än sämre problemlösare på att överblicka och justera sina infallsvinklar.
- Goda problemlösare är mer benägna att få till en elegant lösning på problem än vad sämre problemlösare är.

Lester poängterar dock den varning som *Lesh* utfärdade (Lesh, 1985 refererad av Lester, 1994) om att vi inte ska förvänta oss att sämre problemlösare automatiskt blir experter bara för att vi på kort tid försöker lära dem expertmetoder. Snarare är det så att det krävs lång tid för att bli en god problemlösare. Litteraturen ger oss fem svar på frågan om vad som krävs för att bli en god problemlösare:

- Studenter måste lösa många problem för att kunna utveckla sina färdigheter som problemlösare.
- Problemlösningsförmågor utvecklas långsamt under en lång tid.
- För att studenter ska kunna dra nytta av instruktioner måste de tro att deras lärare tycker att problemlösning är viktigt.
- De flesta studenter drar stor nytta av systematiskt planerade problemlösningsinstruktioner.
- Att lära elever *om* problemlösningsstrategier och olika delar av problemlösning gör väldigt lite för att förbättra elevers förmåga att lösa generella matematiska problem.

3.2 Kursplaner i Matematik

Problemlösning är en del av det centrala innehållet i matematik för såväl grundskolan som gymnasieskolan. Stycket nedan är ett utdrag ur kursplanen för matematiks centrala innehåll i årskurs 7-9.

”Problemlösning

- *Strategier för problemlösning i vardagliga situationer och inom olika ämnesområden samt värdering av valda strategier och metoder.*
- *Matematisk formulering av frågeställningar utifrån vardagliga situationer och olika ämnesområden.*
- *Enkla matematiska modeller och hur de kan användas i olika situationer.”*

Stycket nedan är ett utdrag ur kursplanen för matematik 1a:s centrala innehåll för gymnasiet enligt Gy11.

”Problemlösning

- *Strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg.*
- *Hur matematiken kan användas som verktyg i behandlingen av omfångsrika problemsituationer i karaktärsämnena. Matematikens möjligheter och begränsningar i dessa situationer.*
- *Matematiska problem av betydelse för privatekonomi, samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen.*
- *Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.”*

Vi har tagit med dessa utdrag för att dessa ska kunna användas senare i uppsatsen när vi ska diskutera våra resultat och den övriga litteraturen, då dessa kursplaner kommer att utgöra grunden för vårt sätt att använda problemlösning i vår framtida lärargärning.

3.3 Vad är problemlösning?

Schoenfeld (1992) citerar *Halmos* (1980) när han gör distinktionen att matematiken med nödvändighet kräver saker som axiom, teorem, bevis, definitioner, teorier, formler och metoder för att kunna existera. Dock betonar han att ingen av dessa delar är syftet med matematiken, utan syftet med all matematik är i grund och botten att lösa problem. Därför uttrycker han åsikten att vad matematiken verkligen består av är problem och lösningar.

Schoenfeld (1992) fortsätter med en förklaring att de flesta matematiker, genom tiderna och i nutid, söker efter svar på nya problem. När matematiker förr gav bevis för olika begrepp i matematik så var de alla tvungna att lösa ett problem som kunde ta dagar, veckor och år att lösa. Därför kan problemlösning vara det som på något sätt är det som får matematiken att utvecklas och gå framåt.

En person, menar *Schoenfeld* (1992), som har varit en frontfigur med denna syn på matematik är *George Pólya*. *Lesh* och *Zawojewski* (2007) går så långt att de anser att det är *Pólyas* syn på problemlösning som all annan problemlösning utvecklats utifrån. Även *Reiss* och *Törner* (2007) påstår att de kan se spår av *Pólyas* problemlösningsmetodik i matematikundervisningen i Tyskland. *Schoenfeld* (2007) skriver att när *Pólya* undervisade sina elever i matematik så fokuserade han inte på att undervisa sina elever om olika matematiska begrepp, utan gav dem snarare uppgifter att lösa som krävde att de gissade och experimenterade med matematik. *Schoenfeld* citerar *Pólya* (1945) när han skriver att för en matematiker så kan matematik snarare upplevas vara en gissningslek. Ibland behöver man gissa sig till ett teorem innan man kan lösa det med ett bevis. Han menar att *Pólya* liknar det vid en vardagssituation där helt plötsligt något oväntat händer som du måste lösa. I regel så kommer inte det självklara svaret omedelbart utan vi får gissa i början innan vi försöker oss på att lösa problemet. *Schoenfeld* förklarar att i *Pólyas* syn på matematikundervisning måste elevers erfarenhet av matematik korrelera med hur matematik faktiskt skapas. Detta anser vi också vara en viktig punkt: att elever får en verklighetsanknytning i matematikämnet, så att de inte får en felaktig bild av matematik som någonting som endast existerar mellan klassrummets fyra väggar.

Reiss och *Törner* (2007) omnämner de fyra stegen som Pólyas problemlösningsmetodik bygger på: (1) Att förstå problemet, (2) forma en lösningsstrategi, (3) genomföra lösningsstrategin, och slutligen (4) se tillbaka på lösningen och dess resultat. De skriver i sin artikel att dessa fyra steg är tydligt förklarade i *Pólyas* bok. Deras tolkning av *Pólyas* fyra-steg-metodik är följande: Det första stadiet handlar om att förstå problemet genom att exempelvis ställa sig frågor om vad som är känt och okänt i uppgiften etc. Man kan exempelvis undersöka de relevanta talen i uppgiften eller rita en bild för att lättare bilda sig en förståelse av problemet. I det andra stadiet ska man analysera relationerna mellan de olika data i som framkommer i problemet och kanske försöka omformulera uppgiften med egna ord. Det tredje stadiet innebär att genomföra alla beräkningarna och kontrollera att dessa stämmer. Det fjärde och sista stadiet handlar inte bara om att kontrollera korrektheten i sin lösning, utan även att utvärdera och reflektera över den. Vi upplever själva att det sista stadiet ofta uteblivit i vår egen erfarenhet av skolan, vilket är negativt eftersom vi anser det vara viktigt att få möjlighet att reflektera över sitt lärande.

Dessa fyra steg, eller stadier, som *Pólya* formulerat har länge setts som färdigheter elever bör utveckla, skriver *Lesh* och *Zawojewski* (2007). Författarna instämmer med att dessa fyra steg kan vara praktiskt att använda i forskningssammanhang, och det är vanligt att erfarna matematiker använder dessa steg när de ska förklara hur en lösning ser ut. Men, menar de, forskningen har inte visat på någon korrelation mellan implementering av dessa steg i matematikundervisningen och förbättrade prestationer i elevers problemlösningsförmågor. De ställer sig frågan varför elever inte verkar ta till sig de lösningsmetoder (exempelvis Pólyas) som deras undervisande lärare i matematik redovisar kring ett tidigare problem, och utnyttjar dessa när de försöker lösa ett nytt problem? Möjligtvis, menar de, är förmågan att lösa ett problem snarare en fråga om att tolka problemet än att lära in specifika lösningsstrategier. Att exempelvis rita en bild är nödvändigtvis inte till en hjälp för en elev om denne inte vet vad för typ av bild den ska rita för att lösa det specifika problemet. Därför ger *Lesh* och *Zawojewski* (2007) sitt perspektiv på *Pólyas* fyra-steg-metod: Att stegen snarare handlar om att hjälpa en person att fundera, reflektera och tolka ett problem än att ge en metod för att lösa ett problem. Detta är också vår tanke om *Pólyas* problemlösningsmetodik, att den handlar mer om tolkning än om ett visst tillvägagångssätt.

3.4 Metakognition

Lesh och *Zawojewski* (2007) förklarar att ”metakognition” uppstod i början av 1990-talet utifrån de problemlösningsteorier som dominerade innan dess. Men de påpekar att själva grundtanken att reflektera över sitt eget tänkande har funnits ända sedan *Deweys* tid.

Schoenfeld (1992) skriver att metakognition brukar delas in i tre delar, och tar endast upp en av dessa i sin artikel: *Självreglering*, eller övervakning och kontroll. Ett exempel på denna metakognitiva förmåga som han anger i sin text är att kunna avgöra huruvida ditt sätt att närma dig ett problem är det korrekta. Detta innebär i praktiken att om man efter en stunds begrundan på ett problem inser att tillvägagångssättet man valt är fel och kan ändra sig och angripa problemet utifrån ett annat perspektiv, då har man använt sig av den metakognitiva förmågan *självreglering.*

Schoenfeld (1992) har redogjort för en egen observation av detta fenomen i sin artikel, utifrån en situation då han var lärare i problemlösning på ett universitet. Hans elever arbetade på ett problem som de hade 20 minuter på sig att lösa. Trots att de inte hade någon framgång med det tillvägagångssätt de använde sig av för att lösa problemet så framhärdade de ända tills tiden tog slut. De löste aldrig ut ett svar på problemet, och efteråt kunde eleverna heller inte förklara på vilket sätt deras lösningsmetod skulle ha kunnat ge en lösning på problemet.

Vidare påpekar *Schoenfeld* (1992) att denna typ av beteende, som är beskrivet ovan, inte förekommer särskilt ofta i klassrum där elever arbetar med rutinuppgifter. Orsaken till det är att rutinuppgifter grundas på repetitionsprincipen, vilket innebär att man på förhand vet vilka verktyg eller redskap som används för att lösa uppgifterna. När elever däremot ska lösa problem där de på förhand inte vet hur de ska finna lösningen på problemet, då uppvisas den typ av tillvägagångssätt som *Schoenfeld* beskriver som *"read, make a decision quickly, and pursue that direction come hell or high water"* (Schoenfeld, 1992, s.356). Vi tycker nog att *Schoenfeld* lyckades med att formulera en mening här som ramar in det vi själva sett ute på våra praktiker och vår egen skoltid, både i grundskolan och högre utbildning; att det är lätt att fastna i ett tankemönster.

Även *Lesh och Zawojewski* (2007) har redovisat rapporter om diverse undersökningar man gjort kring metakognition i deras artikel, exempelvis en studie där elever fick se videoinspelningar av sig själva när de satt och löste ett problem. Eleverna, som nu hade tittat på videoinspelningarna, klarade av att redogöra för hur de tänkte när de försökte lösa uppgiften, men forskarna kunde inte visa på ett samband mellan detta och förbättrade framtida prestationer. En annan undersökningsrapport de tagit med i sin artikel är en undervisningssituation där läraren hade en testgrupp och en kontrollgrupp. I testgruppen undervisade läraren eleverna i hur man använde sig av metakognition, medan kontrollgruppen inte fick denna kunskap. Det visade sig att testgruppen visade på betydligt högre prestationer än kontrollgruppen, och dessutom så kunde testgruppen förklara och argumentera för sina resonemang. En slutsats som *Lesh* och *Zawojewski* (2007)) drar av dessa studier är att metakognition hjälper elever att bättre förstå och därmed lösa problem inom ett specifikt ämnesområde, som exempelvis geometri eller aritmetik etc.

Schoenfeld (1992) redovisar en annan observation där resultatet blev klart annorlunda jämförelsevis med de elever han skrev tidigare, som inte fann en lösning på ett problem under de 20 minuter som de hade på sig att lösa problemet. Den nya observationen beskriver en lärare som fick ett komplicerat problem att lösa, inte detsamma som i föregående exempel, på 20 minuter. Det *Schoenfeld* förefaller poängtera i detta fall är att läraren spenderade halva tiden med att analysera, experimentera och testa olika lösningsmetoder istället för att direkt välja en specifik metod och hålla fast vid den. Trots att läraren hade färre fakta och ledtrådar än *Schoenfelds* elever, så löste läraren problemet. Intressant, menar *Schoenfeld* (1992), är att läraren genererade många gissningar och lösningsförslag utan att låta sig bli distraherad av dem, och att detta troligtvis var den främsta anledningen till att läraren löste problemet medan eleverna inte gjorde det.

Eftersom *Schoenfeld* (1992) anser att detta är en metakognitiv förmåga som kan läras ut, så spenderade han en tredjedel av lektionerna med sina elever på att ställa dem frågorna: *”What (exactly) are you doing? (Can you describe it precisely?) Why are you doing it? (How does it fit into the solution?) How does it help you? (What will you do with the outcome when you obtain it?)* (Schoenfeld, 1992, s. 356)

I början var i regel eleverna något osäkra på hur de skulle svara, men efter att de insett att *Schoenfeld* (1992) kommer att ställa samma frågor varje lektion så blev det för eleverna snart en vana att börja reflektera och svara honom. Även *Lesh* och *Zawojewski* (2007) refererar i sin artikel till denna pedagogik som *Schoenfeld* använder sig av, men förhåller sig samtidigt kritiska till att metakognition enbart skulle vara positivt. De menar att en lärare som ställer metakognitiva frågor till sina elever kan distrahera dem i deras tankegångar, och i en del fall kan det inträffa att elever tolkar lärarens frågor som en markering att de är på ”fel spår”. Vidare anser de att det kan vara lärorikt för elever att göra fel och låta dem testa sina felaktiga lösningar och jämföra dessa med den korrekta lösningsmetoden. Med andra ord så kan metakognitiva metoder vara mer användbara som ett analytiskt verktyg där eleverna inte får frågorna muntligen ställd till sig, utan tyst får fundera över vad som gick fel.

3.5 Uppfattningar.

Schoenfeld (1992) förklarar begreppet ”uppfattningar” med att det är den förståelse och de känslor vi har inför matematik. Han refererar till *Lampert* (1990) när denne menar att matematik förknippas med att veta något med hundra procents säkerhet och därmed kunna svara på en fråga snabbt. Vidare förklarar *Lampert* (1990) att denna typ av inställning, eller attityd, bildas i skolan genom tre olika erfarenheter som eleverna ofta möter i matematikämnet:

- Att göra matematik är att följa lärarens regler
- Att kunna matematik är att svara rätt på lärarens frågor
- Matematisk sanning avgörs då läraren bedömer om man gjort rätt eller fel.

Schoenfeld (1992) skriver att dessa tre erfarenheter i förlängningen kan få den negativa effekten att elever nästan omedelbart ger upp om de inte fort finner en lösning på ett problem. Han avslutar sin text om elevers uppfattningar med två slutsatser: Den första är att eleverna bildar sina uppfattningar om matematik i klassrummet, och den andra är att dessa uppfattningar påverkar eleverna på ett mycket påtagligt sätt med i regel negativa konsekvenser. Vi tror att det är få personer som inte känner igen sig i denna beskrivning som *Schoenfeld* gör, och vi håller med honom att detta inte kan ge en positiv effekt i matematikundervisningen i längden

Lesh och *Zawojewski* (2007) hänvisar i sin tur både till *Schoenfeld* (1992) ovan och *Lampert* (1990), men med en mer detaljerad lista över vilka attityder som råder i klassrummet utifrån dessa:

1. Det finns bara ett sätt att lösa ett matematikproblem.
2. Elever ska bara lära sig matematik på ett mekaniskt plan där de memorerar utan att förstå.
3. Matematik arbetar man med ensam, inte i grupp.
4. Elever som förstått matematikundervisningen kommer att kunna lösa ett problem inom det specifika området på 5 minuter eller mindre.
5. Matematikundervisningen i skolan har lite eller ingenting alls att göra med verkligheten.
6. Matematiska bevis har inget att göra med den process som ingår i upptäckter eller uppfinningar.

Där *Schoenfeld* (1992) förhåller sig kritisk till denna typ av inställning till matematik, så antar *Lesh* och *Zawojewski* (2007) ett försiktigare ställningstagande gentemot dessa attityder. De menar att inställningen att ett matematikproblem endast har en lösning inte nödvändigtvis ger en negativ effekt, eftersom någon gång under elevens skolgång måste denna inställning gett ett positivt resultat. Att inställningen är negativ när det gäller att lösa komplicerade problem är det ingen diskussion om, menar de, men däremot när eleverna gör prov där det finns flera uppgifter att lösa så är den inställningen positiv, eftersom det i regel endast finns ett svar och en lösning vid de tillfällena. Deras slutsats är att inställningen istället för att motarbetas bör göras flexibel, så att elever kan byta mellan olika inställningar beroende på situationen. Trots att vi förstår *Schoenfelds* inställning till dessa attityder, så är det svårt att förneka *Lesh* och *Zawojewskis* lite mer pragmatiska inställning. De nationella proven i matematik som ofta utgör en viktig grund för betyg brukar i regel vara uppbyggda på ett sätt som uppmuntrar till de attityder som *Schoenfeld* nämnde här ovan.

4. Teori

4.1 Teorigrund

Vi utgår från SOLO-taxonomin som i sin tur bygger på den konstruktivistiska kunskapssynen (se avsnitt ”SOLO-taxonomin” nedan). Detta innebär att de utgör grunden för vår undersökning och därmed för vårt syfte med uppsatsen och kommer därför refereras till och användas genom hela uppsatsen. De ligger till grund för enkäter och intervjuer, och används även till att tolka de resultat vi får från vår undersökning senare i arbetet.

4.2 SOLO-taxonomin

SOLO-taxonomin bygger på principen att tänkande sker på olika nivåer eller plan (Taplin, 1998). *Taplin* menar exempelvis att det *imaginära* och det *konkret-symboliska* sinnet, som båda till viss del ligger till grund för SOLO-taxonomins utformning, är de tankeprocesser och tillvägagångssätt som används i skolan. Det senare av de två lär man sig att använda i skolan, medan det *imaginära* tankesättet är något man snarare gör instinktivt, som att gissa och uppskatta något, och det används även utanför skolan. När eleverna börjar lära sig matematikreglerna för hur exempelvis en multiplikation genomförs med hjälp av konkreta exempel så börjar de använda det *konkret-symboliska* sinnet. De olika tillvägagångssätten eller tankeprocesserna behöver självfallet inte utesluta varandra. Det händer även en själv att man ibland applicerar en gissning på ett problem för att försöka finna ett mönster eller samband.

Det kan vara bra att känna till att SOLO står för *”Structure of the observed learning outcome”* (Brabrand & Dahl, 2009). *Brabrand* och *Dahl* citerar *Biggs* (2003) när de i sin artikel förklarar att taxonomin är en sorts hierarki. Denna hierarki utgår ifrån att ny kunskap bygger på tidigare och mer grundläggande kunskap. Exempelvis så kan man inte börja lösa matematikproblem som kräver kunskaper i division innan man har lärt sig hur man dividerar. På samma sätt är SOLO-taxonomin uppbyggd på ett sådant sätt att dess nivåer ska spegla en progression i lärandeutvecklingen, eller svårighetsgraden, inom ett visst ämne. Bedömningen av lärandeutvecklingen som man ska analysera utifrån taxonomin utgår ifrån en respons som en person ger på en specifik fråga. Responsen ska med hjälp av taxonomin kunna analyseras på ett sådant sätt att de begrepp och processer som använts ska kunna urskiljas, för att på så vis se på vilken nivå personen arbetar inom när denne svarade på frågan. Det finns sammanlagt fem sådana nivåer i SOLO-taxonomin:

Förstrukturell (Prestructural): Eleven löser inte uppgiften, antingen på grund av att denne inte förstår uppgiften, eller använder en enkel men felaktig lösningsmetod som generar ett felaktigt lösningsförslag (Chick, 1998; Brabrand & Dahl 2009).

Enkelstrukturell (Unistructural): Eleven kan plocka ut en typ av relevanta data ur uppgiften för att kunna ställa upp en enkel lösningsmetod som endast kräver en uträkning för att genera ett svar (Chick, 1998; Brabrand & Dahl 2009).

Multistrukturell (Multistructural): Eleven kan utföra flera beräkningar med hjälp av data som finns i uppgiften för att genera ett lösningsförslag. Däremot kan inte eleven koppla ihop olika data såvida deras inbördes relation inte är tydligt utsatt eller formulerad i uppgiften. Detta kan innebära att eleven kan lösa räkneuppgifter som kräver flera olika uträkningar, men inte uppgifter som kräver att eleven själv måste finna data som inte redan finns utsatta i uppgiften (Chick, 1998; Brabrand & Dahl 2009). Som *Brabrand* och *Dahl* beskriver det:”*the student sees the many trees, but not the forest”* (Brabrand & Dahl, 2009, s. 535).

Relationell (Relational): Här kan eleven koppla ihop data på ett sådant sätt att denne kan dra slutsatser och få fram andra data som inte finns direkt utsatta i uppgiften, och därmed se vilka inbördes relationer som råder mellan olika matematiska begrepp och data. Man börjar med andra ord koppla ihop de olika delarna för att skapa en helhet (Chick, 1998; Brabrand & Dahl 2009).

Utökat samband (Utökat samband): Här kan eleven se vilka relationer som råder mellan olika matematiska begrepp och data för att sedan dra slutsatser som är utanför deras eget kunskapsområde. Det kan leda till att eleven lyckats finna en ny kunskap som denna inte hade innan. Denna nivå är mycket svår för en elev att uppnå, och för forskaren är det minst lika svårt att göra en uppgift som ger möjlighet för en elev att uppnå denna nivå (Chick, 1998; Brabrand & Dahl 2009).

Taplin (1998), som omnämndes tidigare under detta avsnitt, nämnde två olika tankeprocesser eller tillvägagångssätt som används i skolan: Det *imaginära* och det *konkret- symboliska* tankesättet. Dessa två återkommer i *Chicks* (1998) artikel men med några tillägg. Hon hänvisar till *Piaget* när hon beskriver fyra utvecklingsstadier: Det *sensomotoriska, imaginära, konkret-symboliska* och slutligen *formal-operationella*. Även om dessa egentligen beskriver ett barns utveckling, så används de ofta för att beskriva olika stadier av resonerande och tänkande och det är inom detta spektrum som SOLO-taxonomin är utformad. Här flikar vi in en annan studie av *Boulton-Lewis* (1994) om hur elever ser på lärande. Hon har i sin studie redovisat ett antal intressanta och konkreta elevsvar som representerar dessa fyra olika utvecklingsstadier:

> *"Sensorimotor: 'I prefer to work alone with concrete hand on applications rather than nebulous abstract ideas'; 'actually sit down and use the computer… trial and error'; 'watch someone doing the activity'; 'do it for yourself";"(Boulton-Lewis, 1994, s. 397)*

> *"Iconic: 'I am a visual learner… better understanding… see what is happening'; 'need to see diagrams or make notes'" (Boulton-Lewis, 1994, s. 397)*

> *"Concrete-symbolic: 'I learn by listening to what people say'; 'verbal discussion/explanation to someone else'; 'listening to views and ideas of others'; 'collate as much information as I can lay my hands on':"(Boulton-Lewis, 1994, s. 397)*

> *"Formal: 'to understand requires you to read'; 'taking notes and doing further reading.'" (Boulton-Lewis, 1994, s. 397)*

Om vi återgår till *Chicks* (1998) studie så fokuserar hon på det sista utvecklingsstadiet, det *formal-operationella*. Hennes studie bygger på att dels kunna urskilja de olika nivåerna i en respons utifrån SOLO-taxonomin, dels på att diskutera en bredare syn på den *formal-operationella* nivån, som ska speglas genom nivån *utökat samband* i SOLO-taxonomin. Tidigare matematiker har diskuterat om det kan vara som så att det finns två *formal-operationella* stadier, kallade för *formal-1* och *formal-2* stadierna. Man menar att de som kan arbeta på ett helt abstrakt plan utan några konkreta eller specifika fakta att utgå ifrån arbetar inom *formal-1* stadiet. Kan man ta det ytterligare ett steg längre och inte bara arbeta inom det abstrakta området utan även kunna teoretisera och utöka sin kunskap med hjälp av det abstrakta tänkandet så arbetar man inom *formal-2* stadiet. Man kan förklara det som att *formal-1* stadiet innebär att man *förstår* ett begrepp, medan *formal-2* stadiet innebär att man själv *bevisar* ett begrepp.

Chick (1998) diskuterar även de problem som kan uppstå när man ska analysera ett svar utifrån SOLO-taxonomin. I sin studie uppmärksammade hon att en del av lösningsmetoderna till matematikproblemen i sin slutgiltiga utformning hamnade inom *multi-* eller *enkelstrukturell* nivåerna, detta trots att hon visste att uppgifterna hade krävt ett resonerande på *relationell* nivå när de löstes. Hon betonar också det vanskliga med att bedöma ett svar på *utökat samband* nivån, framförallt i *formal-2* stadiet, eftersom det kan vara svårt att urskilja vilken kunskap som är ny och vilken som var känd sedan tidigare. Att bedöma den kognitiva process som ligger bakom ett svar är med andra ord svårt, och även om man läser mellan raderna så är det troligaste att man aldrig med säkerhet kan veta vilken nivå ett svar egentligen hamnar inom.

4.3 Konstruktivism

Stensmo (2007) går igenom den konstruktivistiska synen på kunskap som vi i mångt och mycket lutar oss mot. Han refererar till Piagets *epistemologi* (kunskapssyn) som går ut på att kunskap skapas i den enskilda individen. Detta sätt att se på kunskap förhindrar synen på kunskap som något objektivt och absolut, istället är den konstruktivistiska kunskapen både föränderlig och provisorisk. Detta innebär också att kunskapskonstruktionen är *självreglerande*. Med detta menas att man som människa eftersträvar en jämvikt mellan omvärlden och den egna uppfattningen om denna omvärld. Om människan iakttar någonting som inte stämmer med den tidigare erfarenheten försöker hon antingen passa in den nya informationen i redan befintliga tankemönster, *assimilation*, eller förändra dessa befintliga tankemönster för att passa den nya informationen, *ackommodation*.

Genom dessa processer måste människan vid varje nytt sinnesintryck själv avgöra vilket som är mest tillförlitligt; befintliga tankekonstruktioner eller nya intryck (Stensmo, 2007). Kunskapskonstruktionen blir genom dessa olika processer hela tiden aktiv. Då den jämvikt som eftersträvas inte får vara i obalans tvingas människan hela tiden till utveckling av sina tankar. Kunskapen skapas, konstrueras, som en kombination och ett växelspel mellan det upplevda och förnuftet.

5. Litteratursammanfattning

Vi har studerat problemlösning ur ett såväl historiskt som nutida perspektiv. Den teori vi lutar oss mot gällande problemlösning kretsar kring problemlösningens metodik. Då flera av de forskare vi studerat har hänvisat till *Pólya*, så utgår vi från hans fyra faser. Vi applicerar både

Schoenfelds (1992) och *Lesh* och *Zawojewskis* (2007) tankar på *Pólyas* problemlösningsmetodik, då dessa matematiker tar upp de viktigaste aspekterna från litteraturstudiet ovan. Sammanfattningsvis kan man säga att *Schoenfeld* (1992) distanserar sig från synen på problemlösning som strikt metodiskt utan förespråkar ett friare förhållningssätt gentemot problemlösning där kreativitet, gissningar och upptäckter får stort utrymme. Å andra sidan menar *Lesh* och *Zawojewski* att användandet av en specifik problemlösningsmetodik som exempelvis *Pólyas* inte nödvändigtvis är fel, då de menar att den snarare är ett verktyg för reflektion kring och förståelse för ett problem och dess lösning.

Ifråga om metakognition som didaktisk metod så är *Schoenfeld* (1992) en frontfigur. Hans tanke är att elever ska lära sig tänka *metakognitivt* genom att ställa dem frågor muntligt. Syftet med detta är att detta i sin tur ska hjälpa eleverna att träna upp den förmåga som han kallar för *självreglering*, vilket innebär att man inte ska fastna i ett visst tillvägagångssätt utan kan vara flexibel. Återigen är det *Lesh* och *Zawojewski* (2007) som håller sig lite kritiska till *Schoenfeld*, då de menar att det kan vara mer givande för eleverna om de får göra fel och reflektera över det i tysthet..

Vi har tidigare redovisat lite olika uppfattningar som både *Schoenfeld* (1992) och *Lesh* och *Zawojewski* (2007) menar råder generellt gentemot matematikundervisning i skolan. Dessa uppfattningar kommer vi att jämföra med de attityder vi mött hos våra intervjupersoner.

6. Metod

Vi har i denna studie använt oss av såväl en kvantitativ enkätundersökning som semistrukturerade intervjuer (Patel & Anderson, 2003). Vi kommer här att i detalj gå igenom de olika undersökningsdelarna.

6.1 Enkäter

Uppgifterna på enkäterna baserades på SOLO-taxonomins olika nivåer. Detta gjordes för att skapa en progression i uppgifterna, från lättare till svårare. Poängen med enkätundersökningen var att vi skulle få svar på hur elevernas lösningsförslag såg ut, dels vilka typer av uppgifter som innebar svårigheter.

Vi valde två teman, ”vinklar” och ”area”. Dessa valdes för att det är ämnen som eleverna troligtvis är förtrogna med och finns med i vardagslivet. Vi ville självfallet undvika att ge uppgifter som eleverna med liten sannolikhet skulle kunna lösa. Detta blev extra komplicerat med tanke på ålderskillnaden mellan de båda klasserna. Enkäterna genomfördes i två olika klasser, en högstadieklass och en gymnasieklass. Alla elever fick göra enkäten en och en, och vi informerade innan undersökningen att allt material är konfidentiellt och endast kommer att användas till uppsatsen. Undersökningen tog mellan 10 och 40 minuter. Eleverna fick dock hela lektionspasset till sitt förfogande om de ville. En av frågorna, nummer 7, hade fått skalsiffrorna tvärtom på de två olika undersökningarna, vilket fick beaktas när vi analyserade resultaten. Den ena varianten frågade alltså efter en förstoring medan den andra frågade efter en förminskning. Högstadieklassen skrev namn på sina, vilket gymnasieklassen inte gjorde. Anledningen till att högstadieklassen skrev namn var för att undersökaren på förhand ville veta vilka resultaten av enkäterna var innan intervjuerna skulle genomföras. När vi sedan skulle bearbeta enkäterna så gjorde vi dels en statistisk presentation av resultaten i form av stapeldiagram och tabell, dels en analys fråga för fråga för att se hur de olika uppgifterna löstes. Nedan visas den utdelade enkäten.

Vinklar

Enkelstrukturell: V

1. Vad är vinkeln V?
   Ledning: Vinkelsumman är 180°

80° 60°

Multistrukturell:

2. Beräkna vinkeln V (på utsidan av Triangeln). Triangeln är likbent, vilket innebär att triangelns två nedre hörn är lika stora.

Ledning: Vinkel U+V = 180°

80°

V

U

Relationell:

3. Vinkel V är hälften så stor som vinkel W, och vinkel U är 20° större än vinkel V. Hur stora är vinklarna?

W

V U

4. Här nedan ser du tre geometriska figurer: En trehörning, en fyrhörning och en femhörning.

Finn ett samband mellan figurernas vinkelsummor. Vad är exempelvis vinkelsumman på en sexhörning? När du har hittat ett mönster/samband, så ska du skriva ett generellt uttryck för vinkelsumman som gäller för alla geometriska figurer med minst tre vinklar:

Ledning: När du skriver ett generellt uttryck (= matematisk formel) så använder du både bokstäver och siffror, förslagsvis bokstaven *n* i detta fall!

Vinkelsumma = 180° Vinkelsumma = 360° Vinkelsumma = 540°

Area

Enkelstrukturell:
5. Räkna ut arean på fyrkanten.
Ledning: Arean = b•h

4

6

Multistrukturell
6. Räkna ut det vita områdets area.

2 2
2
5
8

Multistrukturell
7. Nedan finns två rektanglar. I den första finns sidorna utsatta, men på den andra finns bara skalor på sidorna som förhåller sig till den första rektangelns sidor (se strecken på sidorna för att se vilken sida som hör till vilken sida). Räkna ut den andre rektangelns area. OBS! rektanglarna är inte proportionerliga på bilden!

1:a rektangeln 2: a rektangeln

3 1:2

4 1:4

Utökat samband
8. Skriv en formel för det mörka områdets area (romben).
Ledning: Rombens hörn skär kvadratens sidor (*a*) på deras mittpunkt. Ett generellt matematiskt uttryck skrivs med hjälp av både bokstäver och siffror (= matematisk formel).

A

Figur 1. Den utdelade enkäten.

6.2 Intervjuer

Vi utförde en kvalitativ undersökning som genomfördes genom intervjuer med två olika elevgrupper. Intervjuerna baserades på en genomförd enkät och var semistrukturerade (Patel & Anderson, 2007), vilket innebär att vi hade ett antal nedskrivna frågor att utgå ifrån, men att de inte var begränsade enbart till dessa. De frågor som var centrala i intervjuerna kretsade kring hur eleverna tänkte när de såg, läste och löste uppgifterna på enkätundersökningen. Tillvägagångssättet eleverna använde för att lösa uppgifterna stod i fokus under intervjuerna. Sidospår som resulterade i frågor kring matematiska begrepp och förtydliganden av vissa påståenden var ett sätt för intervjuaren att skapa ett meningsfullt samtal och skapa en länk till de mer relevanta frågorna.

Samtliga inspelade intervjuer *transkriberades* vilket innebär att vi skrev ner ord för ord vad som sagts under intervjuerna. Transkribering kan ske på olika sätt, med olika detaljdjup. Vi valde att hålla oss på en *talspråklig nivå* vilket innebär att vi transkriberade uttryck som ”hmm”, ”äääh” och skrev ner ord och meningar som eleverna faktiskt uttalade dem. Däremot underlät vi att markera kortare pauser, emfaser och liknande. Orsaken till detta förfarande var att dessa inte ansågs väsentliga för uppsatsens syfte.

Genom att transkribera samtliga intervjuer fick vi fram en ansenlig mängd text. Denna textmassa analyserade vi genom att leta efter ord och uttryck som var gemensamma hos de olika intervjupersonerna. Vi ville undvika att fastna i för mycket detaljer på varje enskild intervju och istället finna tankemönster och attityder genom att jämföra och kategorisera de olika intervjusvaren.

6.3 Urval

De elever som ingick i studien utgjordes av två klasser, en på högstadiet och en på gymnasiet. Högstadieklassen var en sjundeklass och gymnasieklassen gick andra året på Omvårdnadsprogrammet. Vi kände till båda undersökningsgrupperna eftersom vi hade haft eleverna tidigare via våra VFU-perioder. Eftersom vår undersökning bestod av två olika forskningsmetoder, ”kvantitativ” och ”kvalitativ” (Patel & Davidson, 2007), så blev urvalsprocessen av studieobjekt olika beroende på undersökningsmetod. I fallet med den kvantitativa undersökningen, enkäten, så utfördes studien på båda klasserna bortsett från de som var sjuka eller frånvarande. I intervjuerna, den kvalitativa undersökningen, valdes elever ut från de klasser som genomförde provenkäterna. En av dessa intervjuer spelades aldrig in på grund av tekniska fel.

Urvalet till intervjuerna var inte slumpmässigt då vi visste vilka eleverna var och hur de generellt presterade i skolan. Vi valde ut fyra elever från varje klass som skulle intervjuas. Anledningen till att vi valde de intervjupersoner vi gjorde var att vi eftersökte en spridning bland eleverna. Vi ville inte intervjua endast högpresterande elever utan ville uppnå en blandning mellan högpresterande och lågpresterande elever i de bägge grupperna. Utöver detta hade vi lite olika tillvägagångssätt som berodde på tidsskillnaden; den ena hade intervjuerna direkt i direkt anslutning till enkätundersökningen, medan den andra som intervjuade årskurs 7-eleverna hade en dags mellanrum. I sin tur ledde detta till att den ena intervjuaren visste hur eleverna hade presterat på enkätundersökningen, medan den andra inte hade den förkunskapen utan endast kände till elevernas generella prestationsnivå. Urvalet blev därmed mer slumpmässigt för den intervjuare som genomförde den kvalitativa delen av undersökningen i direkt anslutning till enkätundersökningen. Avsikten för båda var att försöka få en spridning i prestationsnivån, men den som intervjuade årskurs 7 eleverna valde bort de som inte hade uppnått *enkelstruktur* nivå på enkäten. Denna spridning ansåg vi vara välbehövlig för att kunna dra någon form av generell slutsats.

6.4 Etiska överväganden

Vi informerade samtliga elever som deltog i enkäterna och intervjuerna om syftet med uppsatsen och var tydliga med att allt deltagande skedde på frivillig basis. Vi klargjorde att endast vi skulle ha tillgång till allt material som samlades in och att inga skolnamn eller klasser skulle avslöjas. Vi bedömde det inte som nödvändigt att be om målsmäns tillstånd för enkäter och intervjuer då ämnet för undersökningen inte kan klassas som känsligt eller etiskt tvivelaktigt. Utöver detta var vi även tydliga med att resultatet endast skulle användas för denna uppsats syfte. Genom dessa åtaganden har vi uppfyllt Vetenskapsrådets Forskningsetiska krav (Vetenskapsrådet, 2002)

7. Metoddiskussion

7.1 Intervjuer

När det kommer till intervjuerna så fanns det en del mindre felkällor som även nämnts tidigare. En är att den som intervjuade högstadieeleverna lät eleverna ha sina provsvar framför sig under intervjun. En annan skillnad är att gymnasieintervjuerna skedde direkt efter enkätundersökningen, vilket inte var fallet med årskurs 7. En annan detalj som dök upp var att intervjupersonerna i årskurs 7 fick reda på att uppgift 7 hade en felskriven siffra, och utgick därmed från den ”korrekta” formuleringen av uppgift 7 under intervjun.

Vi tror dock inte att detta påverkade våra resultat så mycket. Man måste ta i beaktande att gymnasieklassen faktiskt precis hade fyllt i enkäten och hade allting i färskt minne, vilket innebar att de inte behövde ha sina provresultat framför sig. Det hade blivit en större klyfta mellan de två intervjusituationerna om årskurs 7 både haft sina intervjuer dagen efter och dessutom inte få se hur de hade gjort. Som det var nu använde årskurs 7- eleverna endast sitt prov som stöd vid intervjuerna, och de visste vid detta tillfälle inte om de hade rätt eller fel på uppgifterna. Detta är undantaget uppgift 7, som de förstod efter att de informerats om skalskiftningen att de hade gjort fel på. Det blev också tydligt under intervjun med årskurs 7 att de behövde ha det stöd som deras prov gav dem, eftersom de ibland hade glömt bort hur de hade gjort och en del var osäkra på hur de skulle svara på frågorna intervjuaren ställde. I slutändan gör vi bedömningen att dessa felkällor inte inverkar nämnvärt på våra resultat.

Att analysera och bearbeta intervjuer kan ta tid, och det kan ändå vara svårt att få välgrundade slutsatser. Det blev tydligt att vi på ett omedvetet plan började jämföra de två undersökningsgrupperna med varandra, troligtvis på grund av den markanta skillnaden det var i deras svar på våra frågor. Åsikter, attityder och värderingar gentemot matematik var en röd tråd genom gymnasisternas intervjuer, medan årskurs 7 var mer sakliga och måna om att svara på intervjuarens frågor på ett tillfredsställande vis. Även om vi fick svar och bekräftelse på hur de två olika elevgrupperna löst sina uppgifter, så upptäckte vi att det var svårt att nonchalera hur stor betydelsen av vilka känslor man har inför matematik påverkade resultaten. Därför har vi även tagit med värderingar och attityder bland våra resultat. Man kan säga att enkäterna gav oss data om elevernas lösningsmetoder, medan intervjuerna både gav bekräftelse på det och samtidigt tog undersökningen ett steg längre.

7.2 Enkäter

I efterhand är det alltid saker man hade velat göra lite annorlunda. När det kommer till enkätundersökningen så insåg vi efter att ha bearbetat resultaten från enkätundersökningen att vinkeldelen var betydligt mer genomtänkt än areadelen. Dels var vinkeldelen mer enhetlig till sin struktur, och dels var förkunskapskraven för att klara de uppgifterna på en högre nivå. På areadelen blandades det in flera begrepp, såsom ”skala”, ”area”, ”algebra”, ”multiplikation” m.m. Vi tror att detta gjorde det svårare för eleverna att lösa areauppgifterna, och vi insåg också att fråga 7 inte låg på *relationell*-nivå utan på *multistrukturell*-nivå, vilket inte stämde överens med våra riktlinjer för uppgifterna. Vi tror också att den uppgiften blev snäppet svårare för årskurs 7, eftersom de fick den förminskade varianten på uppgiften (se ovan).

En annan sak som dök upp var uppgiftsformuleringarna. Inte för att vara överkritisk, men vi upptäckte att fråga 3 hade behövt ha en annan utformning för att undvika ”gissningslösningarna” som mer eller mindre alla hade redovisat på den. Vidare så hade vissa uppgifter ganska mycket textmassa, vilket enligt intervjuerna avskräckte en del elever. Här är det dock svårt att avgöra om det endast var negativt med mycket text, eftersom de nationella proven i matematik ganska ofta har svårare uppgifter med en hel del textmassa.

Det viktigaste med enkäten var att få en progression i uppgifterna och detta lyckades vi med. Med tanke på att detta var något nytt för oss som undersökare och att de resultat vi fick ändå hade en tillfredsställande progression, så fick vi trovärdiga och givande data till vår uppsats.

Även om vi skulle ha lyckats skapa det perfekta provet efter SOLO-taxonomins nivåer, så skulle ändå bearbetning av data vara en komplicerad process. Anledningen till detta är att en person kan lösa ett komplicerat matematiskt problem på en *relationell* nivå, men upptäcker sedan att en del beräkningar och tillvägagångssätt kan tas bort eftersom lösningen i sig egentligen är en enkel process, och redovisar i slutändan en lösningsmetod på *multistrukturell* nivå och ibland till och med på en *enkelstrukturell* -nivå. Vem som helst inser att detta kan skapa lite bekymmer när man ska analysera den typ av data som vi har fått genom våra enkäter, och detta är en viktig anledning till att vi ville genomföra intervjuer med vissa av eleverna. Vi hoppades med andra ord på att få en del kompletterande data genom intervjuerna till våra enkätundersökningar.

7.3 Urval

Det som kan ses som en felkälla kring urvalet är det faktum att de två klasserna har haft olika gallringsprocesser tidigare under sin skolgång. Med detta menar vi att högstadieklassen ännu inte valt någon specifik inriktning för framtida studier eller yrken, vilket innebär att högpresterande och lågpresterande elever blandas mer slumpmässigt – man hamnar helt enkelt i den klass och skola som man blir tilldelad vid skolstart på högstadiet, såvida man inte har något speciellt önskemål. Ser man istället på omvårdnadsklassen på gymnasiet så har en gallringprocess genomförts i och med inträdet till gymnasiet; varje elev får välja en specifik inriktning, och dessa inriktningar har två huvudkategorier: Teoretisk linje eller yrkeslinje, eller så kallad praktisk linje. I regel brukar skoltrötta, eller ”pluggtrötta”, elever välja de yrkesinriktade linjerna eftersom det innebär färre teoretiska ämnen. På samma sätt brukar elever med ett intresse för teoretisk kunskap och framtida högskolestudier välja de mer teoretiska linjerna. Detta innebär för vår undersökning att omvårdnadsklassen redan har haft en tidigare urvalsprocess som troligtvis innebär att klassen består till stora delar av elever som är skoltrötta och generellt är mer lågpresterande än på de mer teoretiska linjerna på gymnasiet. Vi bedömde dock inte att detta på något sätt var negativt för vårt syfte eftersom vi undersökte elevers uppfattningar och tillvägagångssätt när de arbetade med matematikuppgifter.

8. Resultat

8.1 Sammanställning

I denna del har vi sammanställt tre diagram och en tabell som visar enkätundersökningens resultat. I samtliga diagram representerar staplarna det antal elever som klarat de olika uppgifterna i enkäten.

Figur 2: Diagrammet visar hur många av högstadieklassens 18 elever som klarat av att lösa de respektive uppgifterna.

Figur 3: Diagrammet visar hur många av gymnasieklassens 16 elever som klarat av att lösa de respektive uppgifterna.

Figur 4: Diagrammet visar hur många av de totalt 34 elever som klarat av att lösa de respektive uppgifterna.

Det vi ser i diagrammen ovan är att progressionen är tydligast på areauppgifterna, även om lösningsgraden där också är betydligt lägre. Nedan redovisas resultaten även i tabellform. Uppgift 3 och 7, som skulle ligga på samma svårighetsgrad, visar helt skilda resultat. En del bakomliggande förklaringar till detta diskteras längre ned i uppsatsen när vi går igenom enkätsvaren. De andra uppgifterna verkar dock ha ungefär lika många rätt och fel.

Tabell 1: Tabellen visar hur stor andel av eleverna som klarade de respektive uppgifterna.

Andel elever som klarade uppgifterna	Uppgift 1	Uppgift 2	Uppgift 3	Uppgift 4	Uppgift 5	Uppgift 6	Uppgift 7	Uppgift 8
Högstadieklass	94 %	56 %	61 %	11 %	83 %	50 %	11 %	6 %
Gymnasieklass	100 %	56 %	75 %	0 %	88 %	50 %	6 %	0 %
Båda klasserna	97 %	56 %	68 %	6 %	85 %	50 %	9 %	3 %

Diagrammen och tabellerna ovan är endast till för att ge en översikt hur många rätt och fel det var på enkätsvaren. Mer detaljerad analys av enkäterna följer efter intervjuerna.

8.2 Genomgång av intervjuerna

Samtliga citat från intervjupersonerna är hämtade från transkriberingarna av intervjuerna. Intervju 1 med Kalle bifogas som exempel på hur samtalen såg ut till sin struktur. Samtliga namn är fingerade.

Intervjuperson 1 - Kalle

Elevens bakgrund är att han är en elev med höga betyg i såväl matematik som i andra ämnen. Han är en talför och diskussionsglad högstadieelev som är kunskapshungrig och gärna diskuterar avancerade begrepp med lärare och kamrater.

I intervjun blev hans talförhet väldigt påtaglig, då han gärna ville förklara i detalj hur han tänkt kring de olika uppgifterna. Det är uppenbart redan från hans svar på den första uppgiften att eleven är väl förtrogen med matematiska begrepp och termer.

”*V är väl variabel för vinkeln*”

Att han använder ett uttryck som ”variabel” och även det korrekta uttrycket subtrahera (istället för ”ta minus”, ”minusa” eller ”ta bort”) även i tal säger en hel del om hans inställning till matematik. Eleven var trygg nästan på gränsen till övermodig i att han vet vad som frågas efter redan innan han läst färdigt uppgiften och fått veta vad frågeställaren är ute efter. Till exempel läste han inte ens ledningen på uppgift 1 utan såg först under intervjun att den fanns där.

Kalle visade tydliga matematiska förmågor när han försökte och lyckades lösa samtliga uppgifter. Han använder bilder och mönster och kopplar tydligt till tidigare kunskaper och erfarenheter. Han visade också prov på försök att hitta andra sätt än de han själv använt för att lösa uppgifterna, tydligast illustrerat i samtalet kring uppgift 6. Han rör sig i området av *relationell* och *utökat samband* i sitt resonemang.

Intervjuperson 2 - Lisa

Lisa är en högpresterande elev i de flesta ämnen. Hon är inte lika pratglad och samtalsbenägen som Kalle, utan ger koncisa svar utan att sväva iväg och lägga ut texten för den som lyssnar. Hon ger ett intryck som är resultatinriktat, och under intervjun var det tydligt att Lisa inte vill svara fel för att inte uppfattas som en svag elev.

Hon har löst samtliga uppgifter och är den enda elev i båda klasserna som ställt upp korrekta matematiska uttryck för samtliga uppgifter, även om hennes uttryck för uppgift 8 formulerades under intervjun. I uppgifterna 3, 4 och 8 är detta tydligast där hennes hanterande av algebraiska uttryck förefaller välutvecklat.

”*Jag skrev ju n, och med n menar jag då antal hörn*”

Lisa visar tydligt med detta citat att hon läst instruktionerna till uppgiften, där vi rekommenderade eleverna att använda just bokstaven n i sitt uttryck. Hon använder *n* på ett helt korrekt sätt och visar därmed att hon förstår poängen med att använda sig av en variabel även om hon inte använder det uttrycket (variabel). Lisa har inte samma naturliga förhållande till matematiska uttryck som Kalle visar prov på, utan pratar istället väldigt mycket på samma sätt som hon skriver. För att kunna föra ett resonemang med henne krävdes att hennes provsvar låg framför henne så att hon kunde titta på det och förklara hur hon tänkte, till skillnad från Kalle som kunde prata fritt kring matematiska uttryck och uppgifterna i fråga. Lisa närmar sig *utökat samband* även om hon oftast rör sig kring nivån *relationell.*

Intervjuperson 3 - Elin

Elin är en högpresterande elev i matematik, kännedom om hennes resultat i andra ämnen saknas. Hon är tystlåten och på grund av sina ambitioner hårt arbetande.

Denna elev är väldigt lik Lisa i sitt sätt att prata och resonera kring uppgifterna, men uppvisar inte lika stora matematiska färdigheter. Även likt Lisa är det tydligt att Elin vill framstå som att hon kan mycket och att hon inte svarar fel på intervjufrågorna. Elin visar att hon kan finna mönster men lyckas inte använda bokstäver och algebraiska uttryck på ett tillfredsställande sätt.

”*Rätt formel vet jag inte, jag är inte så säker på att jag fick det*”

Hon uttrycker i intervjun att hon är osäker på om hon kommit fram till rätt formel, och förklarar även på uppgift 8 att det var svårt när det inte fanns konkreta mått utsatta på uppgiften utan endast ett *a* på ena sidan. Hon rör sig kring *relationell* nivån, men når inte upp till *utökat samband*.

Intervjuperson 4 – Erik

Erik är en medelpresterande elev i matematik och i NO-ämnen generellt, och verkar vara osäkrare på de mer omfattande räkneuppgifterna. Han är dock pratglad och vill gärna förklara hur han tänkt, och är inte alls orolig för att han skulle råka säga fel saker.

Han löste ungefär hälften av uppgifterna, och då uteslutande de uppgifter som inte krävde kunskaper kring algebra eller krävde att han behövde bearbeta mycket data. I regel löser Erik de uppgifter som ligger på *enkelstruktur* nivå, i undantagsfall även *multistrukturell.*

”*Om det nu var rätt uträkning så kändes det bra*”

Erik uttrycker en viss osäkerhet även på enklare uppgifter. Han kan uppenbarligen räkna men är inte alltid så trygg i att han räknar på det sätt som uppgiften kräver, vilket citatet ovan visar. Den enda uppgiften Erik verkar säker på att ha klarat av är uppgift 5.

Intervjuperson 5 - Magnus

Magnus är en elev som i de flesta ämnen har stora förmågor och goda kunskapskvaliteter. Å andra sidan är hans ambitionsnivå många gånger för låg och han gör därför inte alltid sig själv rättvisa. Hans högstanivå är hög men den nivå han nöjer sig med är strax över medel.

De uppgifter som endast täcker nivån *enkelstruktur* är Magnus välbekant och trygg med. Där har han stort självförtroende och tycker det är en oerhört enkel nivå. När vi kommer fram till att samtala om uppgift 6 säger han följande:

”*Mmm, det är nu jag börjar låsa mig typ*”

Han förtydligar detta uttryck genom att förklara att när han inser att flera beräkningar krävs för att lösa uppgiften börjar han fundera på om han verkligen kan lösa den. Magnus uttrycker att han förstår att man ska subtrahera de svarta områdenas area från totalarean men säger sig sakna tålamodet för att utföra dessa beräkningar.

Intervjuperson 6 - Sandra

Sandra är diagnostiserad med läs- och skrivsvårigheter. Hon har en hög ambitionsnivå och lyckas med rätt hjälpmedel ofta nå sina mål. Pratglad och driven i skolarbetet.

Gällande uppgifterna förefaller det tydligt att delar av matematiken går som på räls för henne. När det kommer till uppgifter på *enkelstruktur-* och *multistrukturell*-nivå förekommer inga problem. Hon tolkar uppgifterna rätt och vet vilka beräkningar som behöver utföras, dessutom lyckas hon med beräkningarna på ett tillfredsställande sätt.

”*Jag vet inte riktigt hur jag räknade, det bara kom upp i huvudet*”

På flera uppgifter uttrycker Sandra att hon inte kan förklara tillvägagångssättet hon använt då svaret bara ’poppat upp’ för henne. När uppgifterna blir mer textrika eller berör områden som hon inte behärskar ger hon upp direkt. Hon blir mer rädd för mycket textmassa och vissa uttryck än för flera led med beräkningar. Sandras läs- och skrivsvårigheter är givetvis en faktor när det gäller textmassan.

Intervjuperson 7 – Per

Per är en person som i sitt skolarbete har en låg ambitionsnivå. Han besitter tveklöst förmågan att tänka i flera led och skulle med rätt ambition och vägledning kunna prestera på en riktigt hög nivå. I intervjun lyser hans brist på engagemang igenom väldigt tydligt.

”*Hade jag haft linjal hade jag klarat den*”

Ovanstående citat är väldigt symptomatiskt för Pers sätt att se på matematik. Vid flera tillfällen under intervjun ger han uttryck för att han vid första anblicken av en uppgift får en spontan idé för hur uppgiften ska lösas. Som i uppgift 6, där citatet ovan är taget, där alla mått finns angivna men hans första känsla är att en linjal krävs. Under intervjun berättar Per hur man kan gå till väga även utan linjal, men det engagemanget saknades helt under provskrivningen. Även på andra uppgifter visar Per att han fått en första idé till lösningsförlag. När denna prövats och fallerat har han istället för att prova en ny infallsvinkel helt enkelt gett upp.

8.3 Sammanfattning av intervjuerna

När vi tittat på transkriberingen av intervjuerna ser vi tydligt att motivation i stor utsträckning varit av avgörande betydelse för om en uppgift skulle påbörjas eller inte. Detta baserar vi på en jämförelse mellan intervjuerna mellan högstadieeleverna och gymnasieeleverna där gymnasieeleverna många gånger uttrycker en ovilja att försöka lösa en uppgift de inte genast förstod tillvägagångssättet på.

> ”*Per: Den fattade jag inte*
> *Intervjuare: Vad med den ställde till problem?*
> *Per: Det var väl det där ute?*”

Ovanstående citat visar med önskvärd tydlighet den inställning som de intervjuade gymnasieeleverna delar. Även om Per var tydligare i sin brist på motivation än sina klasskamrater så framgick även hos de bägge andra embryon till samma attityd. Tittar man på sjundeklassarnas intervjuer så framgår det aldrig att de var omotiverade inför svåra uppgifter. De nämnde aldrig att något var tråkigt eller jobbigt, utan förklarade helt enkelt bara vad de tyckte var svårt. Svar som att *” Mmm, alltså, ähm, jag förstod inte riktigt vad formel menas(sic!).”* var den typ av förklaring som kom fram hos högstadieeleverna istället. Det kan vara så att gymnasieeleverna upplevde precis samma problem som högstadieeleverna, men gav inte uttryck för detta i intervjuerna ens vid upprepade följdfrågor. Framför allt i samband med uppgift 7 syntes tydliga svar som indikerade att begreppet *skala* var avskräckande för gymnasieeleverna. De intervjuade högstadieeleverna hade samtliga försökt lösa uppgiften, med varierat resultat. Tanken att ge upp för att man inte direkt såg vad svaret skulle bli verkade främmande för högstadieeleverna.

Tre av fyra intervjuade högstadieelever gav ett självsäkert intryck. När de tillfrågades om de trott sig få rätt svar på uppgifterna var responsen ett tveklöst *ja*. Den fjärde eleven gav uttryck för osäkerhet när han fick frågan, vilket bland annat kan bero på att hans matematikprestationer låg på en lägre nivå än hans kamraters. I jämförelse kan man bland samtliga gymnasieelever se tydliga signaler som: ”*det är jag inte så bra på så det var inte så lätt”*. Denna skillnad i inställning bland de intervjuade är väldigt påtaglig.

8.4 Reflektioner kring enkätsvaren

När vi började titta på resultaten från de bägge klassernas enkäter trodde vi först att högstadieklassen på alla uppgifter presterade bättre än gymnasieklassen. Detta berodde på att vi främst tittade på de mer analyskrävande uppgifterna. När vi sedan sammanställde resultatet i diagrammen ovan visade det sig att gymnasisterna presterade bättre på uppgifterna som motsvara *enkel-* och *multistrukturell* nivå men sämre på de *relationella* och *utökat samband* uppgifterna. Vi drar slutsatsen att gällande de rena räkneuppgifterna är rutinen av stor betydelse, alltså helt enkelt att eleverna räknat denna typ av uppgifter många gånger tidigare. Problemlösningsmässigt visade det sig klart och tydligt att högstadieeleverna var mer benägna att testa olika tillvägagångssätt, till skillnad från gymnasisterna som oftare fastnade i ett enda tankesätt och sedan saknade vilja och förmåga att byta metod. Detta ledde till större framgång för högstadieeleverna än för gymnasieeleverna på de analyskrävande uppgifterna.

Vi märkte väldigt tydligt att det första uppgiftspappret, det med vinklar, fick en större andel korrekta svar än den del som innehöll frågor kring area. Orsakerna till detta kan vara flera. En tydlig orsak är att kopplingen mellan de olika uppgifterna på vinkeldelen är tydligare. Samtliga frågor på vinkeldelen kretsade kring vinkelsumman i en triangel som på olika sätt skulle utnyttjas för att få fram en lösning. I areadelen används fler uttryck och fler matematiska begrepp och metoder. I uppgift 7 blandas begreppet *skala* in vilket avskräcker flertalet av gymnasieeleverna och många av högstadieeleverna blandar ihop förstoring och förminskning. I uppgift 8 är det inte längre rektanglars area som är i fokus, vilket också gör att den röda tråden i areadelen försvinner.

En annan orsak kan vara att komplexiteten på areauppgifterna översteg vinkeluppgifternas. Exempelvis kom multiplikation och division in tydligare på areadelen än på vinkeldelen vilket gjorde beräkningarna mer avancerade. Tittar man på uppgift 1-3 är det mest addition och subtraktion som används, och i uppgift 3 kunde man till och med gissa sig fram till rätt svar och sedan kontrollera så att det stämde då vinkelsumman är känd. I fallet med areauppgifterna var man tvungen att utföra alla beräkningsleden utan möjlighet att kontrollera om man gjort rätt eller inte. Detta kan leda till en osäkerhet huruvida man använt rätt uträkningsmetod eller inte.

Vi blev förvånade över att fler elever lyckades lösa uppgift 2 än vad som lyckades lösa uppgift 6. Uppgift 6 var en kombination av staplade multiplikationer och subtraktioner, medan uppgift 2 bestod av addition, subtraktion och kännedom om vinklar. Man kan diskutera huruvida eleverna löst uppgift 2 om vi inte satt ut ledningen att en likbent triangel har lika stora basvinklar. Slutsatsen skulle rent av kunna dras till att ledningen på vinkeluppgifterna var mer behjälplig än ledningen som gavs till areauppgifterna. Då uppgiften inte handlade om att känna till matematiska begrepp utan förmågan att utföra beräkningar i flera led bedömde vi dock ledningen som nödvändig för att eventuella kunskapsluckor gällande trianglars egenskaper inte skulle påverka förmågan att utföra beräkningar på en *multistrukturell* nivå.

Att många elever såg mönstret i uppgift 4 att vinkelsumman för varje nytt hörn ökar med 180 grader var oväntat. Förvåningen försvann dock när vi fick veta att högstadieklassen nyligen gått igenom teorin bakom denna uppgift med sin lärare. Vad de inte gjort i klassen var att definiera en formel för vinkelsummans beroende av antalet hörn i en regelbunden polygon. Att två elever i sjunde klass ändå lyckades formulera ett matematiskt uttryck med bokstäver är anmärkningsvärt. Detta visar att eleverna lyckades använda tidigare tillägnad kunskap för att få nya insikter i ett tidigare okänt kunskapsområde.

Det mest intressanta med hela enkätundersökningen är att högstadieeleverna i väldigt stor utsträckning försökte lösa samtliga uppgifter. Detta till skillnad från gymnasieeleverna som visade stor benägenhet att ge upp vid första motstånd. Som vi förstod av intervjuerna med gymnasieeleverna var det det första intrycket av en uppgift som avgjorde om det var värt att ens försöka sig på en lösning.

8.5 Genomgång av elevernas enkätsvar fråga för fråga

Fråga 1.

Denna fråga klarade samtliga elever i de bägge grupperna med en enda person som undantag. Fråga 1 var med andra ord precis så enkel som vi avsåg, och den elev som svarade fel har helt enkelt begått ett slarvfel där eleven lagt ihop vinklarna så att vinkelsumman blir 170˚. I uppgiften finns en ledning att vinkelsumman ska vara 180˚, det enda eleverna behöver göra är alltså att räkna ut 180-60-80 = 40.

Fråga 2.

På denna fråga kan man utöver nivån *enkelstrukturell* även uppnå nivån *multistrukturell*. I båda grupperna var det 56 % av eleverna som klarade att lösa uppgiften fullständigt, alltså på nivån *multistrukturell*. 4 av gymnasisterna och 3 av högstadieeleverna, sammanlagt ytterligare 21 %, har kommit en bit på vägen och nått en *enkelstrukturell* nivå. De har kommit fram till att de ospecificerade vinklarna i triangeln tillsammans ska vara 100 grader, och i vissa fall även att vinkeln *u* ska vara 50 grader. De har alltså löst en uträkning men inte lyckats kombinera denna uträkning med nästa vilket hade krävts för att lösa uppgiften. Sammantaget är det alltså 77 % av eleverna som helt eller delvis löst uppgiften. Nivåskillnaden mellan första och andra uppgiften är alltså tydlig.

Fråga 3.

Fråga 3 är en fråga där man kan gissa sig till eller testa sig fram till korrekt svar. Denna uppgift är på maximalt *relationell* nivå, där man måste kunna läsa mellan raderna för att kunna få fram korrekt information för att kunna nå fram till lösningen. Det gavs i uppgiften inga specificerade vinklar utan endast förhållandet mellan de olika vinklarna. För att nå nivån *relationell* krävs att eleven ställer upp ett matematiskt uttryck där u, v och w ingår. Ingen elev nådde denna nivå. De som klarat av uppgiften, i den meningen att de fått fram ett korrekt svar, har istället gjort på något av följande sätt: testat sig fram; utgått från uppgift 1 eller bara chansat. Sammanlagt 68 % av eleverna klarade av att få fram rätt svar på denna uppgift, vilket är 12 procentenheter fler än som klarade uppgift 2. Anledningen till detta är enligt oss att uppgiften gick att lösa fullständigt på *enkelstrukturell* nivå eftersom endast en uträkning krävdes och inte ens en uträkning om man testade sig fram. Den omedelbara reflektionen kring det är att en uppgift där nivån *multistrukturell* krävs för en fullständig lösning inte är lika lättuppnåelig för majoriteten av eleverna som en uppgift där man klarar sig på *enkelstrukturell* nivå. Självkritiskt inser vi att vi borde formulerat uppgift 3 så att det krävdes ett matematiskt uttryck för att få svar som låg på *relationell* nivå. Minsta motståndets lag indikerar att inte många elever varken på högstadiet eller på gymnasiet skriver ett matematiskt uttryck om det inte explicit efterfrågas. Elever som behärskar matematik på en högre nivå brukar i regel redovisa ”snyggare” lösningsförslag, eftersom det i regel är vad (de nationella) proven kräver, samt ge säkrare resultat. Hos de högpresterande högstadieeleverna syns tydligt denna ambition, medan det råder total avsaknad av detta hos samtliga gymnasister.

Fråga 4.

På fråga 4 har vi bett eleverna skriva ett generellt uttryck för ett geometriskt mönstersamband. Detta gör att den nivå eleverna maximalt kan uppnå på denna uppgift är *utökat samband*, alltså skapandet av en generell, applicerbar matematisk formel. Denna nivå är som tidigare nämnts SOLO-taxonomins högsta nivå. Det första vi kan konstatera är att uppgiften är betydligt svårare än de första tre uppgifterna på vinklar. Detta speglas väl i resultaten på uppgiften, där endast två elever, 11 %, lyckades lösa problemet. En stor skillnad mot framför allt uppgift 3 är att *enkelstrukturell* nivå på uppgift 4 inte tar dig in i själva problemet. Detta verkar bidra till att väldigt få elever ens försökt lösa uppgiften utan bara har gett upp direkt. Uppgiftens natur är sådan att man måste finna ett mönster först, och därefter uttrycka detta i en formel. I denna uppgift ligger inga direkta beräkningar, och de elever som försökt räkna har fastnat direkt och sedan inte kommit vidare.

Svårigheten med uppgiften ligger i att hitta den generella metoden för att räkna ut vinkelsumman, vilket dels kräver en förståelse för figurernas uppbyggnad och vad som verkligen efterfrågas, dels att kunna hantera bokstäver (algebra) i beräkningar. De siffror som finns är en hjälp för att hitta mönstret, men hjälper inte eleverna om de inte förstår uppgiften i sig. De två elever som löst uppgiften har förstått vad de ska titta efter, de betonar klart och tydligt att det är antalet hörn som är det viktiga, till och med antalet trianglar som ryms i de olika figurerna nämns. Av de elever som börjat försöka laborera med siffrorna, alltså de olika figurernas vinkelsummor, har vissa högstadieelever insett att det är 180 graders ökning hela tiden, medan endast en av gymnasieeleverna har sett detta samband. De övriga gymnasieeleverna som laborerat med siffrorna har gått till väga på något av följande sätt:

1. Fastnat i att rektangelns vinkelsumma är dubbla triangelns och sedan inte kommit vidare när det visat sig att pentagonens vinkelsumma inte är dubbla rektangelns.
2. De har sett att summan av triangelns och rektangelns vinkelsumma är pentagonens vinkelsumma, men sedan inte kommit vidare därifrån.

Intressant är att eleverna som kommit längst på uppgiften, och i två fall även lyckats lösa den, samtliga är högstadieelever. Detta visar att det inte är räknerutinen som fäller avgörandet, utan istället den matematiska förståelsen av ett problem. Här bör tilläggas att vissa av högstadieeleverna relativt nyligen gått igenom hur många trianglar det ryms i en geometrisk figur, och visste att vinkelsumman ökar med 180º för varje nytt hörn. Däremot kände de inte till vinkelsummaformeln.

Fråga 5.

Precis som fråga 1 så ligger denna uppgift på e*nkelstrukturell* nivå. Anmärkningsvärt är att trots ledningen är det inte fler än 85 % som lyckas lösa uppgiften. Felräkningar eller dubbla areaberäkningar är orsakerna till fel svar. Denna typ av beräkning förekommer både bland högstadie- och gymnasieelever och hamnar på en *förstrukturell* nivå där ingen förståelse för fenomenet *area* visas. Uppgift 1 och 5 är snarlika så till vida att all information som behövs är väldigt rättfram och lättillgänglig. I uppgift 1 gavs en ledning men ingen formel. I uppgift 5 gavs formel och endast relevanta siffror förekom. Detta borde innebära att felkällorna till uppgift 5 endast kan vara 2, nämligen de som nämnts ovan: felräkning eller brist på förståelse för vad area är och hur en rektangel är uppbyggd med bas och höjd. Resultatet på uppgift 5 är förvånande sett i ljuset av resultatet av uppgift 1.

Fråga 6.

Denna fråga korrelerar med uppgift 2 och därmed krävs nivån *multistrukturell* för att kunna lösa uppgiften fullständigt. Resultatmässigt var utfallet nära nog identiskt med uppgift 2, där det endast skiljde en elev per grupp som löst uppgiften, vilket ger att 50 % löste uppgiften. Precis som i uppgift 2 är all information tydligt presenterad, och kopplingen till uppgift 5 är uppenbar då det endast är areaberäkningar som ska göras. Skillnaden är att det krävs flera areaberäkningar som dessutom antingen ska adderas eller subtraheras beroende på val av metod. De som inte lyckats lösa uppgiften har gjort det på grund av följande orsaker:

1. Felberäkning, men annars rätt uppställning.
2. Plockat ut fel tal från rektangelns sidor, och därmed fått fel areaberäkningar.
3. Har inte försökt lösa uppgiften.

De flesta har dock försökt lösa uppgiften och då använt sig av multiplikation, vilket indikerar att man ser kopplingen mellan uppgift 5 och 6. De flesta som misslyckades gjorde det på grund av orsak nummer 2, alltså att de hade problem med att utläsa sidornas längder på ett korrekt sätt. De som löste uppgiften gjorde det antingen genom att subtrahera bort de två svarta areornas yta från hela rektangelns area, eller genom att dela in det vita området i två mindre rektanglar och räkna ut dess respektive areor och sedan addera dem.

Fråga 7.

Med denna fråga ville vi se huruvida eleverna kunde se relationen mellan hur en rektangels area förändras när sidornas längd förändras, och på så sätt hamna på en *relationell* nivå. Vi misslyckades med denna ambition och uppgiften hamnade på en lägre nivå än avsett. Sammantaget lyckades 3 elever (9 %) lösa denna uppgift. Vår avsikt var att uppgift 7 skulle motsvara uppgift 3 men för area istället för vinklar, men vi ser att klart färre elever lyckades lösa 7 än vad som lyckades lösa 3. Vi ser ett antal bakomliggande faktorer, där de tydligaste är dessa:

1. Kopplingen till tidigare uppgifter. Fråga 3 var tydligt förankrad i uppgift 1 och 2, medan 7 blir mer fristående från uppgift 5 och 6.
2. Många elever försökte inte ens lösa uppgiften.
3. Feltolkning av skalenheterna, eleverna förstorade när de skulle förminskat istället.

I gymnasieklassen är orsak 2 den klart dominerande, alltså att de inte försökte lösa uppgiften. För högstadieeleverna är orsak 3 den som tydligt sticker ut, då merparten av eleverna räknat med en förstorande skala och efter de premisserna gjort korrekta uträkningar. Vi har fört en diskussion om vi skulle rätta svaren från de elever som vänt på skalenheterna som korrekta eller felaktiga, och har bestämt oss för att rätta dem som felaktiga. Detta då det mest intressanta inte är antalet korrekta svar, utan istället tendensen att försöka lösa samtliga uppgifter. Endast två av gymnasieeleverna har gett sig på att försöka lösa uppgiften, båda använde skalorna rätt men endast en av dem räknade rätt hela vägen. De flesta som försökt på uppgiften har förstått att det är multiplikation som behövs för att räkna ut arean.

Fråga 8.

Tanken med frågan var att den skulle motsvara *utökat samband*-nivån i SOLO-taxonomin. I gymnasieklassen var det ingen som ens försökte lösa uppgiften. Däremot i högstadieklassen var det flera elever som skrev, och dessutom som ”gissade” sig till rätt svar, nämligen att romben är halva kvadratens area. Endast en elev lyckades uttrycka den korrekta formeln för arean, dock utan att kunna härleda den. Denna formel uttrycktes under intervjun och inte i skrift på skrivningen. En del elever försökte sätta in siffror istället för a, och på så sätt räkna ut rombens area. En del elever försökte även dela in kvadraten i olika stora bitar, för att sedan kunna addera de mindre bitarnas areor. Få elever försökte använda sig av bokstaven a som var given i uppgiften. Vi kan konstatera att liksom på uppgift 4 var det många som såg ett mönster i denna uppgift, men de lyckades inte härleda eller formulera detta samband. Detta är en uppgift där man måste räkna med bokstäver för att få fram en formel. I uppgift 4 behövde man endast kunna omvandla det mönster man såg till en formel utan avancerade beräkningar. Detta kan vara en orsak till att de som började räkna på uppgiften inte kom vidare utan räknade på sätt som gjorde att de inte kom vidare.

9. Diskussion

Vi ser tydligt att ju högre upp i SOLO-taxonomin vi kommer, desto färre elever lyckas lösa uppgifterna. Det första vi konstaterar är att vi ser en tydlig nedgång i elevernas resultat från de enklare till de svårare uppgifterna, vilket vi ser i de diagram och den tabell som redovisats ovan. Undantaget till detta är uppgift 3. Anledningen till detta är att avsikten med den var att den skulle vara på *relationell* nivå men gick även att lösa på *enkelstrukturell* nivå. Då flera elever löst den genom att gissa sig till rätt svar är det fler som löst uppgift 3 än som löst uppgift 2 som endast kunde lösas på *multistrukturell* nivå. På grund av detta resultat så bekräftas den princip som SOLO-taxonomin bygger på: Att tänkande sker på olika nivåer, och att man inte kan ”hoppa över” en nivå och sedan klara av nästa. Baserat på detta så inser vi, trots våra positiva ordalag om problemlösning nedan, att viss rutinbaserad räkning måste förekomma i klassrummet. Om inte eleverna får möjlighet att repetera och öva på olika begrepp och metoder i matematiken, så kan i förlängningen deras brist på faktakunskaper hindra dem från att utvecklas och klara av svårare uppgifter.

Om vi ser till uppgifterna på *enkelstrukturell* och *multistrukturell* nivå, så löstes dessa av de flesta elever i båda klasserna. Som tidigare konstaterats så presterade gymnasieklassen något bättre på dessa bägge nivåer jämfört med högstadieklassen. Vi kopplar detta till de uppfattningar som *Schoenfeld* (1992) och *Lesh* och *Zawojewski* (2007) skrev om i sina artiklar, med den slutsatsen att gymnasisterna har räknat fler rutinuppgifter än högstadieeleverna och därmed memorerat mer mekanisk matematik. Exempelvis nämnde författarna att elevernas inställningar utgick ifrån att man ska lära sig vissa saker utantill utan att egentligen förstå innehållet. Vi finner spår av detta i den pedagogik som *Milner* (Schoenfeld, 1992) använde i slutet av 1800-talet i sin undervisning i matematik, då eleverna i en klass fick flera uppgifter att lösa av samma typ, men med lite olika formuleringar.

Själva har vi gått i en modernare skola 100 år senare, men känner igen denna pedagogik från de matematikböcker vi arbetat i under vår skoltid. Då var kapitlen i matematikboken uppbyggda på följande vis: ett enkelt avsnitt som kallades för A-delen, ett medelsvårt avsnitt som kallades för B-delen och så det sista avsnittet som var det svåraste, C-delen. I början av varje kapitel fanns det i regel ett kort teoriavsnitt som beskrev tillvägagångssättet för att lösa de kommande uppgifterna. C-uppgifterna började närma sig *relationell* nivå, då dessa ofta hade någonting outtalat i uppgiften, men i regel så fanns kärnan i A- och B-uppgifternas tillvägagångssätt kvar i C-uppgifterna. Denna progression i uppgifterna bygger snarare på rutin än på att förstå vad det egentligen är man gör. Det är inte konstigt att man känner igen sig i den uppfattning som enligt *Schoenfeld* (1992) och *Lesh* och *Zawojewski* (2007) förekommer; att matematik är något man ska lära sig utantill, då både prov och matematikböckerna enligt vår uppfattning byggde på den principen.

Det förefaller som att inte mycket har hänt i matematikundervisningen sedan det tankesätt *Milner* införde blev praxis. *Schoenfeld* kritiserar att det han menar är *Pólyas* ursprungstanke med problemlösning blivit reducerad till något så banalt som rutinarbete. Detta är för oss ingen överraskning då det är denna verklighet vi själva mött i skolan. Att göra som *Schoenfeld* förespråkar och låta problemlösning vara ett självändamål istället för ett sätt att uppnå andra mål borde vara en självklarhet. Att låta en elev få bekanta sig med problem och frågeställningar på sina egna villkor och med sin egen tidspress torde vara synnerligen utvecklande. I den bästa av världar ska i alla fall elever få den tid som de behöver, men i verkligheten vet vi att den tiden sällan finns. Kursplanerna i matematik innehåller trots allt fler områden än problemlösning.

Schoenfeld (1992) vill som bekant inte se problemlösning som baseras på en specifik metod, utan istället se mer av gissningar och framför allt sann förståelse för vad ett problem innebär. Detta är enligt vår uppfattning syftet med *Pólyas fyra faser*, alltså att komma till insikt om vad ett problem innebär. Med andra ord är vi helt eniga med *Lesh* och *Zawojewskis* tolkning av *Pólyas* metodik. Vi anser att *Schoenfeld* å sin sida går för långt när han inte vill se någon form av schema alls användas vid problemlösning. Vi håller med honom så till vida att förståelsen är det viktigaste, dock förespråkar vi att det rent didaktiskt sett kan underlätta att ha en metodik som ett hjälpmedel. Det essentiella med en problemlösningsmetodik, anser vi, är att den är öppen så att risken för att en elev fastnar i ett visst tankesätt där det ”bara finns ett sätt att möta problemet” är liten.

Vi märkte under intervjuerna att gymnasieeleverna verkade ha lätt för att fastna i ett visst tankemönster. När ursprungsplanen fallerade stod man handfallen tills man slutligen eller snarast möjligt gav upp. Detta uttrycks bäst av *Schoenfeld* (1992) i citatet i avsnitt 6.3 ovan, där han ser ett mönster i problemlösning som går ut på att:

1. Läs
2. Fatta ett *snabbt* beslut
3. Följ det tillvägagångssättet du bestämt dig för oavsett vart det för dig.

Precis detta mönster ger Per uttryck för i sin intervju där han uttrycker en spontan tanke vid anblicken av en uppgift. När han sedan testar den metod han bestämt sig för når han antingen

”framgång eller undergång”. Skulle metoden vara korrekt och därigenom generera ett svar som antas vara korrekt uppfattas uppgiften som enkel, skulle metoden däremot vara fel är uppgiften svår. Att försöka sig på att byta infallsvinkel nämns inte ens som en möjlighet.

Ser man närmare på *Pólyas* syn på problemlösning, eller snarare författarnas tolkning av den (Schoenfeld, 1992; Lesh & Zawojewski, 2007; Reiss & Törner, 2007), så ser man att gissningar och antaganden är en del av problemlösningens inre natur. Detta är den andra fasen i *Pólyas* fyra-steg-metod och, anser vi, kanske den viktigaste. Jämför man *Schoenfelds* elever med den lärare *Schoenfeld* (1992) tog upp som exempel på problemlösningsmetodik så visar dessa ganska tydligt att gissningar definitivt är en viktig del av problemlösningsprocessen, kanske till och med det som avgör om man är en bra eller dålig problemlösare. Det bör poängteras att det inte är det att man gissar i sig som är det mest intressanta, utan att man besitter en flexibilitet som gör att man kan se ett problem ur flera olika perspektiv

Intressant är att det i intervjuerna kom fram att de flesta gissade sig till rätt svar på fråga 3. I början tänkte vi att uppgiften var otydligt formulerad, och att vi borde ha gjort den svårare eftersom den låg på *relationell* nivå. Men nu i efterhand när vi läst alla dessa artiklar om problemlösning så inser vi att uppgiften i sig kanske inte var felformulerad. Faktum är att om vi skulle ha formulerat den på ett annorlunda vis så skulle vi också ha begränsat de möjligheter eleverna hade att lösa den på. Denna typ av uppgift hade man istället för att omformulera kunnat låta eleverna bearbeta mer, och då låtit eleverna formulera flera olika lösningsförslag. Om vi ska ge elever möjligheter att lära sig hur man hanterar problem så bör vi inte börja med de svåraste problemen, utan ge dem enklare uppgifter som dock har flera olika lösningsförslag. Detta menar vi sannolikt skulle stimulera elevers kreativitet kring problemlösning, vilket även *Schoenfeld* (1992) hävdar.

I samband med detta bör metakognition diskuteras. *Schoenfeld* (1992) menar att exemplet med läraren som gissade innan han försökte sig på att finna en lösningsmetod till problemet använde ett metakognitivt redskap, som han benämner *självreglering*. Den pedagogik han senare använde sig av i klassrummet med sina elever för att träna dem i *självreglering* gick ut på att lära dem att reflektera över det område i matematiken som de för tillfället arbetade med, genom att ställa dem reflekterande frågor. Detta är något vi tycker är viktigt, då vi menar att förmågan att kunna analysera såväl ett specifikt problem som matematik rent generellt utifrån flera infallsvinklar är ett viktigt redskap för att skapa sig en djupare förståelse av matematik. Här blir den *konstruktivistiska* synen på kunskap aktuell. När man ser på en situation från olika infallsvinklar tvingas man att förändra sina befintliga tankekonstruktioner för att rymma de nya intryck man får. Detta gör att förståelsen för matematik utvidgas. Vi håller med *Lesh* och *Zawojewski* (2007) om att det bästa sättet att uppmuntra eleverna till ett metakognitivt tänkande inte behöver vara att ständigt fråga ett visst antal frågor efter *Schoenfelds* modell. Många gånger vet man själv med sig att man gjort fel, och om man får bearbeta den informationen själv kan det mycket väl leda till nya insikter och att ny kunskap bildas. Ett ständigt påpekande av fel tror vi lätt kan leda till ett dåligt självförtroende i matematikämnet, en osäkerhet som flera av gymnasieeleverna gav intryck av att ha.

Ser man på problemlösningsförmågor så verkade vissa av högstadieeleverna arbeta på en högre nivå än gymnasieeleverna. Resultaten visade att två högstadieelever klarade av uppgift 4, och att en klarade av uppgift 8 genom att förklara lösningen under intervjun. Det bör påpekas att detta är ganska så anmärkningsvärt, med tanke på den diskussion som *Chick* (1998) för om *formula-1* stadiet och *formula-2* stadiet. Detta är elever som inte hade några förkunskaper inom algebra, men som ändå lyckades formulera en helt korrekt formel. Detta visar åtminstone på att de insett vad bokstäverna i en formel egentligen innebär, att de är en variabel som representerar någonting som är föränderligt i ett matematiskt fenomen.

Det är svårt att säga om högstadieeleverna förstod matematiken på en högre nivå, eller om det snarare berodde på inställning och förkunskaper. Det vi ser är att årskurs 7-eleverna i större utsträckning än gymnasieeleverna experimenterade och testade sig fram på de uppgifter de inte kunde lösa direkt. Det är givetvis svårt att peka på exakt vad som är orsaken till detta, men det vi urskiljer som ett mönster under intervjuerna är att det som skiljer de olika grupperna åt är inställningen till matematik i största allmänhet. En utbredd attityd bland gymnasisterna är brist på engagemang och dåligt självförtroende gällande matematik.

Detta med självförtroende såg vi tydligt kopplat till den svårighetsgrad eleven själv bedömde en uppgift motsvara. Tyckte en (gymnasie-)elev att en uppgift verkade svår så blev den spontana responsen att strunta i uppgiften. Om en uppgift å andra sidan upplevdes som enkel så löste man ut svaret. Symptomatiskt för detta tänkande var uppgift 7. Denna uppgift tog sig samtliga högstadieelever an, med blandad framgång. Det var ett begrepp, *skala*, som de kände till, och siffror som inte innebar någon större utmaning. Det högstadieeleverna i stor utsträckning missade var att skalan innebar förminskning istället för förstoring, vilket de tolkat det som. Gymnasieeleverna lät i större utsträckning bli att ens försöka lösa uppgiften, och i intervjuerna kom det fram att själva begreppet *skala* hade en avskräckande effekt.

Hur kan då detta dåliga självförtroende vara så utbrett som det förefaller vara, tydligast illustrerat i gymnasieklassen? I matematiken har vi lärt oss från vår skoltid att ett svar antingen är rätt eller fel, och ett svar är inte ens diskuterbart, det ”bara är så”. Denna uppfattning speglas i de attityder som listas av *Schoenfeld* (1992) och *Lesh* och *Zawojewski* (2007) som de menar är förekommande bland matematikelever i skolan. I avsnitt 6.4 framkommer, i punkt 4 under de attityder som *Lesh* och *Zawojewski* (2007) listar, åsikten att om man inte kan lösa ett problem på mindre än 5 minuter så är det inte lönt att man försöker. Detta innebär i konkreta ordalag att om du inte från början vet hur du ska gå till väga för att lösa ett problem är det bara att låta bli, för du kommer ändå inte att komma på rätt tillvägagångssätt. Denna attityd, som enligt tidigare forskning alltså är verklig, är inte positiv. Vi menar att den försvårar elevers möjlighet att lära sig problemlösning och i förlängningen kunna tillägna sig matematisk förståelse. Att gymnasieeleverna hade en mycket mer negativ inställning till matematik än högstadieeleverna tar vi som en indikation på att gymnasisterna under en längre period varit utsatta för denna typ av pedagogik, med tanke på att högstadieeleverna i regel alltid försökte på alla uppgifterna. Detta är den enskilda faktor som sticker ut allra mest i vår undersökning: att så många av gymnasieeleverna gav upp utan att ens göra en ansträngning till att lösa en uppgift, medan i stort sett alla högstadieelever skrev någonting på varje uppgift.

Denna attityd känner vi igen från vår egen skoltid, att matematik i mångt och mycket handlar om rätt eller fel, och att man ska finna rätt sätt att få fram korrekt svar på. I detta sammanhang vill vi återigen peka på *Schoenfelds* (1992) och *Lesh* och *Zawojewskis* (2007) åsikter om att lärare behöver uppmuntra sina elever att faktiskt experimentera med olika typer av lösningar, istället för att försöka komma ihåg vilken metod som är den rätta för just detta problem. Att låsa sig vid att det endast får finnas ett enda korrekt tillvägagångssätt för att komma åt ett problem är både hämmande och begränsande. Här kommer vi åt det vi anser vara kärnan i *Pólyas* pedagogik, vilket även *Schoenfeld* belyser; förståelsen av ett problem och friheten att hitta ett sätt att lösa det utan en given mall. Det behöver alltså inte vara fel med en mall, men det kan bli fel när man låser sig till en mall. Elever behöver istället uppmuntras till att i större utsträckning pröva sig fram. Om man som problemlösare verkligen förstår ett problems innebörd kommer man även att förstå om svaret man får fram är rimligt eller inte. Om en elev exempelvis ska räkna ut höjden på en flaggstång givet vinklar, flaggstorlek, hushöjd etc. så är inte 40 meter ett rimligt svar. Förstår man vad som efterfrågas förstår man också rimligheten i detta fall. Därför är det viktigt att presentera problem som är förankrade i verkligheten, eftersom det får eleverna att reflektera över sina svar. Detta var också en av de attityder som listades av *Lesh* och *Zawojewski*; att matematikundervisningen har väldigt lite att göra med den värld eleverna är bekanta med.

Just verklighetsförankring har fått en central fokus vad gäller problemlösning som centralt innehåll i Skolverkets befintliga kursplaner för matematik. Ord som ”vardagliga situationer” och ”privatekonomi” ser vi ska utgöra basen för problemlösning i såväl årskurs 7-9 som på gymnasiet. Detta stämmer väl överens med den samstämmiga litteratur vi studerat, främst *Schoenfeld* (1992), *Lester* (1994) och *Lesh* och *Zawojewski* (2007). Efterlevs detta också av undervisande lärare kommer de attityder vi nämnt här förhoppningsvis gradvis att minska. Dessa kursplaner vill vi alltså lyfta fram som goda exempel som kommer att gynna svenska elevers syn på matematik som verklighetsförankrad. Den frihet som kursplanerna ger gällande metod och strategier ser vi också som gynnsam. Det ord som används är ”strategier”, men dessa strategier specificeras inte utan är alltså fria för tolkning. Detta är väsentligt enligt *Lester* då lärandet om strategier för problemlösning gör väldigt lite för att skapa goda problemlösare. Med dessa formulerade förhoppningar avslutar vi diskussionsdelen med en lite mer optimistisk syn på framtida matematikundervisning.

10. Slutsatser

Vi ska nu sammanfatta vad det egentligen är som vi fått svar på. Först och främst upplever vi båda att inställningen, eller motivationen, till matematikämnet har en central betydelse för resultaten av vår undersökning. Vi tror definitivt baserat på resultaten, litteraturgenomgången och diskussionen att elever som är motiverade och engagerade inte ger upp när de stöter på ett problem som är svårt, utan framhärdar och försöker tills de löser det. Det finns självfallet en logik i att ”om man inte vill räkna matematik så gör man det inte heller”. Problemet är inte det logiska argumentet ovan, utan snarare vad som orsakar det. Vi kom fram till att en orsak kan vara dåligt självförtroende, att man har fått fel så ofta att man helt enkelt upplever ”att man alltid gör fel”. Återigen en självklarhet, kan man tycka, att självförtroende spelar en central roll i sådana här sammanhang. Desto allvarligare är slutsatsen att det är matematikämnets tidigare utformning som har skapat detta dåliga självförtroende, samt skapat inställningen att ”antingen har man rätt eller fel, och det avgör läraren”.

Vi har tydligt konstaterat att ju högre upp i SOLO-taxonomins nivåsystem vi kommer, desto färre elever lyckas lösa uppgifter. De elever som exempelvis inte lyckas lösa uppgifter på *multistrukturell* nivå får ännu större problem på *relationell* nivå. Detta är inte överraskande då nivån på de matematiska beräkningarna stiger med nivåerna i SOLO-taxonomin. Vi anser att problemlösning måste ha en central roll i skolans matematikundervisning, men inte utan att eleverna får lära sig grunderna i matematik. SOLO-taxonomin visar oss tydligt att det finns en progression inom matematiken som gör att man inte kan ta några genvägar. Om man inte kan utföra *en* beräkning korrekt är det inte sannolikt att man kan utföra *två* sammanhängande beräkningar korrekt heller.

Vi kommer till slutsatsen att när elever lär sig problemlösning ska de inte lära sig att använda ett färdigt begrepp eller applicera en färdig mall. Betoningen måste ligga på tolkningen och förståelsen av ett problem och där kan en problemlösningsmetodik vara till hjälp men får inte ses som ett universalverktyg. Vi står helt bakom kursplanernas centrala matematikinnehåll som tydligt betonar att problemlösningen måste vara verklighetsförankrad. Görs detta kommer många negativa attityder till matematik att förändras. Genom att applicera metakognition i matematikundervisningen kan vi få en framtid där rutinräknandet får en mer perifer roll och där rädslan för att göra fel minskar.

11. Referenser

Brabrand, C & Dahl, B. (2009). *Using the SOLO taxonomy to analyze competence -progression of university science curricula*. High Educ, nr 58, s. 531-549

Boulton-Lewis, G. (1994). *Tertiary students´ knowledge of their own learning and a SOLO taxonomy*. Higher Education, volym 28, s. 387-402.

Chick, H. (1998). *Cognition in the formal modes: research mathematics and the SOLO taxonomy*. Mathematics education research journal, volym 10, nr 2, s. 4-26.

Lesh, R & Zawojewski, J. (2007). *Problem solving and modeling*. Indiana University och Illinois institute of technology.

Lester, F.K. (1994). *Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994*. Journal for research in mathematics education, volym 25, nr 6, s. 660-675.

Patel, R & Davidson, B (2007); *Forskningsmetodikens grunder*; Lund; Studentlitteratur AB

Reiss, K & Törner, G. (2007). *Problem solving in the mathematics classroom: the German perspective*. ZDM mathematics education, nr 39, s. 432-441.

Schoenfeld, A.H. (1992). *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics*. In D. Grouws (Ed.); *Handbook for Research on Mathematics and Learning* (pp. 334-370); New York; MacMillan

Skolverket (2011a); *Kursplan för Matematik i Grundskolan* [Elektronisk] Tillgänglig: http://www.skolverket.se/forskola-och-skola/grundskoleutbildning/laroplaner/grundskolan/matematik [2012-05-22]

Skolverket (2011b); *Kursplan för Matematik i Gymnasieskolan* [Elektronisk] Tillgänglig: http://www.skolverket.se/forskola-och-skola/gymnasieutbildning/amnes-och-laroplaner/mat [2012-05-22]

Taplin, M. (1998). *Preservice Teachers´ Problem-Solving Processes*. Mathematics Education Research Journal, volym 10, nr 3, s 59-76.

Vetenskapsrådet; *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning.* [Elektronisk] Tillgänglig: http://www.codex.vr.se/texts/HSFR.pdf [2012-05-22]

12. Bilagor

Bilaga 1 Transkribering av Intervju 1

Intervjuperson 1: Kalle

Intervjuare: Okej, här är intervjuperson nummer 1. Vad heter du?

Kalle: Kalle.

Intervjuare: Okej. På den första uppgiften, vad tänkte du när du såg den?

Kalle: Jaa, jag tänkte direkt att jag visste ju att vinkelsumman är 180 grader, så jag bara la ihop dem andra vinklarna, och eh, subtraherade 180 minus, så fick jag det. Och så skrev jag det.

Intervjuare: Du tror att du fick rätt svar på den?

Kalle: Ja, det tror jag. Det är jag ganska säker på.

Intervjuare: Vilka räknesätt använde du, men det nämnde du. Du subtraherade sa du. Och hur såg din uträkning ut?

Kalle: Den var ganska kort. 180-80-60, är lika med 40 grader. Eller 180 grader- 80 grader -60 grader, jag hade kunnat skriva till det där med men kanske.

Intervjuare: Okej, jag såg hur det såg ut där ja. Och hur du tänkte när du löste uppgiften, fast det nämnde du också precis där i början kom jag ihåg. Du kände att du fick nödvändig information för att lösa den? Allting stod med i uppgiften så att säga?

Kalle: Det kände jag väl alltså… Nu när jag tänker efter, jag läste inte meningen den gången, men det ser jag att det faktiskt säger att det är 180 grader.

Intervjuare: Du visste nog det ändå. Och du kände till alla begrepp som fanns i uppgiften, det var ingenting nytt?

Kalle: hmm, V är väl variabel för vinkeln tänker jag att det är.

Intervjuare: Ja, just det. Jo, men det verkar som om du förstod det mesta där. Äh, nummer 2 där. Vad tänkte du när du såg uppgift nummer 2?

Kalle: Ähm, tja…, jag såg ju direkt att den vinkeln var 180 grader totalt, och sedan så när jag läste igenom den så, äh, så sa den att de två nedre hörnen är lika stora då förstod jag att då måste jag - om jag då tänker 180 igen och subtraherar det med 80 grader så får jag 100 och delar det med 2 så får jag 50 grader på varje sån. Och då, nu för att räkna ut hur stor del av dem 180 graderna som den är, så behövde jag bara subtrahera med 50 grader.

Intervjuare. Okej, så fick du ut den där ja. Och där så du fick in alla frågorna i en där ja, det var skickligt av dig får jag säga. Och du fick nödvändig information för att kunna lösa uppgiften där, tyckte du?

Kalle: Mmm.

Intervjuare: hmm, bra. Kände du till alla begrepp som fanns i uppgiften, exempelvis likbent, har du hört det innan?

Kalle: Ähm, alltså, jag tror jag hört det innan, jag kanske inte kopplar det direkt till det här, men jag förstod, det ganska snabbt… vad det innebar, även om det i för sig stod det också, så syntes det liksom på dem att.

Intervjuare: hmm, jo alltså vi skrev ner ganska mycket ledning där på den. Det stämmer det. Äh, uppgift 3 där, äh, vad tyckte du om den när du såg den uppgiften?

Kalle: Jo, ähm, tänkte jag ju att, ähh, det enda som jag fick säkert det var ju 20 grader, skrev jag, så tänkte jag, det är ju 180 grader totalt, och jag vet att det. Vänta, vilken var det som, jag ska bara kolla… Ja, W var dubbelt så stor som V och U var 20 grader större än V, om jag tar väck 20 grader från själva triangeln så blir där, det måste ju U, kan jag räkna så att U och V är lika stora, mmm, eftersom W är dubbelt så stor som dem, så är W lika stor som dem två tillsammans. Så om jag då skulle, och nu så gick jag direkt på att dividera med 4, jag kunde ha dividerat med 2, två gånger, men istället dividerar jag med 4 och la ihop. Så då blev det 180, eller nej, 160 blev det, eftersom jag hade ju subtraherat 180 med 20 så det blev 160 dividerat med 4. Det blev, ähm hjärnsläpp, 40! 40! Och sen äh så fick jag där V var 40, äh och W måste vara 80 om man då fördubblar och då så var U tvungen att vara 40 plus 20, alltså 60 grader. Och så skrev jag upp det. V är 40 grader, W 80 grader och U 60 grader.

Intervjuare: Och du tror att du fick rätt på uppgiften?

Kalle: Ja, det gör jag.

Intervjuare: Då ska vi se. Ja, du fick ändå med alla frågorna, och så både uträkning och räknesätt och hur du tänkte när du löste den. Så vi går vidare till 4:an där, som det är lite längre text på den där. Hur tänkte du på den uppgiften?

Kalle: Jo, alltså, förra gången som vi sysslade med geo, med geometri och vinklar och sånt, då så fick vi lära oss knepet att så många trianglar som kom in i formen, så många, ja, om man säger så här, en triangel har 180 i vinkelsumma, så räknar man hur många trianglar ryms i den, multiplicerar 180 med det. Så alltså har ju en rektangel 360, och som det då står här, och en femhörning 540. Och då så tänkte jag om jag ville skriva en matematisk formel måste jag ju skriva som en liten, ja, ekvation, ja måste skriva en formel med variabler och sånt, så, äh, då fick jag ju hitta på egna namn på dem. Och då fick, äh, *a* och *h* (=*ah*) vara antal hörn, så, eftersom att för varje nytt hörn på en form så kan man få in en ny triangel, så ökar du med en triangel för varje nytt hörn, däremot så en triangel, triangel som man då börjar på från början har tre hörn. Om jag vill kunna multiplicera det här måste jag subtrahera två hörn från den för att få ett hörn så att sedan adderas ett hörn om och om igen. Så då fick formeln bli antal hörn minus två, så blir alltså, börjar det med ett hörn på triangeln och sedan går det uppåt, multiplicerat med 180 i vinkelsumman.

Intervjuare: Okej, så det var så du tänkte där ja. Äh, och du äh, tyckte att du fick rätt på uppgiften?

Kalle: Mmm, det tyckte jag väl, den stämmer. Om man skulle få fram en formel som stämde och fick ihop allting i en uträkning, och det fick jag.

Intervjuare: Okej, äh, då ska vi se, då kan vi ta detta andra pappret här nu då med rektanglar och areor. Uppgift 5, vad tänkte du när du såg den uppgiften?

Kalle: Alltså, den var inte riktigt en ss, jag behövde inte studera så mycket på bilden för att förstå för, vi har kört det så länge, så då vet man liksom att jag ska multiplicera sidorna med varandra. Så då blev det det, och eftersom det inte fanns någon enhet med så skrev jag bara 4 gånger 6 är lika 24 och så fick det bli svaret.

Intervjuare: Mmm, just det. Och du fick all nödvändig information tyckte du på uppgiften?

Kalle: Mmm, ja, den var ju inte så komplicerad den nej, den var mer som inledningen till dem följande, skulle man kunna säga.

Intervjuare: Ähm, tänkte att jag skulle fråga det med så att jag inte glömmer det, på den föregående uppgiften där, fick du all information på den med, tyckte du, var det otydligt eftersom den var lite större?

Kalle: Ähm, alltså…, ähm, nu ska vi se, kanske måste läsa igenom den. En triangel, en fyrhörning och en femhörning … (pratar tyst för sig själv). Jaja, det. Ja, men det tycker jag väl, även om jag egentligen skrev jag inte riktigt upp en rad med olika former och deras vinkelsummor, det var mer liksom, vi har fått veta det.

Intervjuare. Det viktigaste är att du skriver vad du tänker, så att säga. Ähh, och på uppgift 6, den där, just det. Vad tänkte du på den?

Kalle: Jo, då tänkte jag ju liksom, om jag räknar ut arean av alla dem fyra. Äh, okej, om man säger så här, äh, det vita områdets area skulle jag räkna ut, ähm, jag erkänner att jag skulle ha kunnat göra så eftersom att den här svarta området tar upp en hel sida, jag skulle kunnat ha subtraherat 8 med 2 och gjort 5 gånger 5 minus 2 gånger 2. Fast äh, då gick jag mer steg för steg, då gjorde jag så att jag räknade ut det vita området minus dem två svarta områdena, så jag räknade ut det vita områdets area och då räknade jag med hela, och sedan så subtraherade jag det med, ähm, subtraherade arean av dem svarta. Men jag inser att det hade nog varit enklare om jag bara hade tagit 8 minus två är 5, 5 gånger 5 är lika med 25, och sedan minus 4, 2 gånger 2.

Intervjuare: Mhm, du tänkte så ja, just det. Du hittar lite olika sätt att lösa den på, kan man säga. Äh…

Kalle: I för sig, vänta lite, ähm, 5 gånger 8 är 40, minus 10, 30. Jag får det till 26, men 5 gånger 5… Ja, du märke det här, jag kollar fel, ja, 6 gånger 5. Förlåt mig! Det var inte meningen! Jag var slarvig! 8 minus två är inte 5, 8 minus två är 6. Du var duktig på att hålla masken. Okej, 6 gånger 5, 30, minus 4, 26.

Intervjuare: Där fick du nog till det, tror jag.

Kalle: Det var ju så jag hade skrivit innan, det var därför jag blev lite, okej.

Intervjuare. Jag ser, du har skrivit ut uträkningen där ju.

Kalle: Jag skulle inte ha tagit upp det där andra sättet att räkna ut det från början. Nej, men jag fick det rätt.

Intervjuare: Och du tyckte att du fick rätt på uppgiften?

Kalle: Ja, det tycker jag.

Intervjuare: Om vi då tar nummer 7, den med skalorna där. Äh, vad tänkte du när du såg den uppgiften?

Kalle: Faktum är att först fick jag lite hjärnsläpp på vilken man skulle utgå ifrån. Men, sen fick jag bara en liten vink på att man skulle tänka från vänster till höger, så då tänkte jag, första äh, den första siffran är den första formen, den andra siffran är den andra formen.

Intervjuare. Just det. Och du lyckades lösa den i slutändan då?

Kalle: Då räknar jag i skala 2:1 och i skala 4:1, och det innebar att eftersom att jag först fick se var den första i skala 1:1, hur rektangelns sida skulle vara uppmätta, eller måtta, äh, hur långa de ska vara, och då var kortsidan, äh, var då 3 enheter, 4 enheter, och sedan så den andra rektangeln var i skala 2:1 på sidan, på kortsidan, och skala 4:1 på långsidan, och då betyder det att för att få fram dem sidornas storlek så skulle jag behöva multiplicera sidorna, och det gjorde jag då, multiplicerade 3 med 2 och sedan multiplicerade jag 4 med 4, och äh, så multiplicerade jag det, dem, med varann, och jag gjorde allt i en uträkning, så det blev 3 gånger 2 och 4 gånger 4 är lika med 6 gånger 16 är lika med 96. Svar 96 enhet.

Intervjuare: Just, du har skrivit det där ja. Och du tänkte det att du fick rätt där i svaret?

Kalle: Det tror jag nog.

Intervjuare: Och den siste där, 8:an?

Kalle: Ja, alltså, det första som jag tänkte var direkt att jag såg att den här måste ju vara hälften, att romben måste vara hälften av kvadraten, men sen var jag tvungen att försöka på något sätt bevisa det, så då bestämde jag mig för, det säger tydligt att rombens hörn är i mitten av varje sida på kvadraten. Så då så började jag att visa om man skär kvadraten i fyra mindre kvadrater genom att göra ett kryss, ett kryss rakt genom den så får man, markerar man, mitten på alla sidorna. Och sedan, om man då drar ett snett streck och skapar trianglar från mitt till mitt på sidorna så får man två trianglar i varje liten kvadrat och tillsammans formar dem inre trianglarna en romb och dem yttre en kvadrat, och eftersom jag vet att trianglarna är lika stora. Och det är lika många i romben som blev över, så måste det innebära att romben är hälften så stor som kvadraten. Alltså, RA (=rombens area), lika med kvadratens area dividerat med två.

Intervjuare: Äh, okej, tror du att du hade kunnat lösa den med hjälp av algebra, *a* som är där på sidan?

Kalle: Med hjälp av att använda…?

Intervjuare: Bokstavsuträkning, så att säga.

Kalle: hmm, kanske jag hade kunnat. Jag tänkte inte så mycket på det, eftersom jag såg direkt på bilden och började göra en uträkning, men om jag då kollar på det här "skriv en formel för det mörka områdets area, romben, ledning: Rombens hörn skär kvadratens sidor på deras mittpunkt. Ett generellt matematiskt uttryckssätt skrivs med hjälp av både bokstäver och siffror". Okej. Skriv en formel för det mörka områdets area, romben. Jag skrev faktiskt en formel som funkade, jag använde i för sig inte…

Intervjuare: Äh, känner du till algebra? Har du räknat med det sen innan, eller är det helt nytt?

Kalle: Alltså, jag har inte gått så mycket i bakgång med det egentligen, utan det har inte varit så mycket komplicerade, det har mest varit självmana, för i, den enda gång vi har egentligen haft algebra i boken det var i sexan då jag inte jobbade med dem andra riktigt för då hade dem sådana där, den högsta siffran som nånsin användes i deras ekvationer var 4, och det blev 4 gånger 2 är lika med x, räkna ut vad x är. Och sen gick vi inte längre än så, och sen har vi egentligen inte haft mer algebra, så vi har inte riktigt fått veta. Alltså, jag förstår vilken principen är, att få in allting i en formel, att kunna beskriva saker med bara en matematisk formel som alltid funkar, och då använder man bokstäver som kan representera olika siffror, men så länge som man använder just dem här enheterna så ska det alltid bli den här enheten, så att säga. Det är typ det som, ja. Jag undrar lite vad det är jag skulle gjort för att använda *a* för att göra en uträkning. Skulle jag kunna göra romben är lika med a gånger a delat med 2? Jag vet inte, det hade jag kunnat göra, *a* gånger *a* blir den fulla arean, och sen den delat med 2 blir hälften.

Intervjuare: Så du tänker att man dividerar med två så får man ut hälften där i slutändan. Okej.

Kalle: Fastän, det kändes ändå inte riktigt som en förklaring till. Men jag tänkte inte ens på att det fanns ett *a* där som skulle hjälpa mig, jag tänkte liksom att jag skulle skriva allting själv, så.

Intervjuare: Nej, men det ser bra ut. Är det något du tänker på som du vill tillägga, tyckte du provet var svårt?

Kalle: Alltså, det var ju ganska varierande, jag egentligen ingenting var sådär svårt, det var uppgifter som var, som krävde mera räknande och så, men det var ingen som körde fast på. Jag visste hela tiden vad jag var ute efter.

Intervjuare. Då avslutar vi intervjuen med intervjuperson nummer 1, Kalle.

Bilaga 2 Intervjumall

Intervjufrågor:

1. Vad tänkte du när du såg uppgiften?
2. Tror du att du fick rätt svar?
3. Vilket/vilka räknesätt använde du?
4. Hur såg din uträkning ut?
5. Hur tänkte du när du löste uppgiften?
6. Fick du nödvändig information för att kunna lösa uppgiften?

7. Kände du till alla begrepp som fanns i uppgiften?