Andragradsekvation som lärandeobjekt

Det innehåll som eleverna får ta del av och dess betydelse för elevernas lärande

Constanta Olteanu, Högskolan Kristianstad

Abstract

I denna artikel presenteras hur lärare behandlar undervisningsinnehållet då de undervisar om andragradsekvationen. Dessutom presenteras kommunikationens roll i undervisningen och på vilket sätt kommunikationseffektiviteten öppnar olika möjligheter att tolka och reflektera över lösningen av en andragradsekvation för eleverna. Resultaten visar att lärarens sätt att erbjuda olika dimensioner av lärandeobjektet reflekteras i hur elevernas lärande utvecklats.

Matematik och samhällen

Det är lätt att konstatera att diskursen om skolans roll och funktion i samhället världen över har ändras mycket under de senaste åren. Detta är bland annat en konsekvens av den teknologiska utvecklingen i olika länder som innebär ökade krav på kunskaper i matematik. Den teknologiska utvecklingen är i sin tur en konsekvens av användningen av datorer. Den ökande datoriseringen kan betyda att vissa traditionella delar av matematikundervisningen kan tonas ner (tex rita grafer för hand), men datoriseringen innebär också ökande krav på matematikkunskaper (tex tolka grafer som ritas med hjälp av datorer). Det behövs större matematisk förståelse inom traditionella matematikområden, som till exempel algebra och funktionslära, för att kunna programmera datorerna och tolka olika grafer eller diagram. I rapporten *Before It's Too Late* (2000) betonas matematikens betydelse utifrån den snabba globaliseringen och behovet av utbildad arbetskraft, medborgarnas behov av matematik för vardagslivets beslutsfattande, kopplingen till landets säkerhetsintressen, liksom skapandet av vardagsliv, historia och kultur, som är primära förutsättningar för ett livslångt lärande och för civilisationens framsteg.

Förändringarna i samhället innebär även förändringar i skolan, vilket bör påverka skolämnenas innehåll och undervisningen i skolan. Det talas om att förbereda eleverna för en ny sorts samhälle, som kräver andra kunskaper, än de som värderades för 30 eller 50 år sedan. Förr handlade det om att lära in nödvändiga fakta och kanske i viss mån kunna utantill. Den synen på kunskap har gradvis förändrats. Idag poängteras att det viktigaste är att eleverna har kunskap om hur man tar till sig och behärskar olika begrepp, sållar bort och bearbetar information.

Ett av de centrala problem som matematikutbildningen över hela världen står inför, både teoretiskt och praktiskt, är hur elevernas lärande i matematik kan underlättas på bästa sätt. Samhället och allmänheten har de senaste åren[1] börjat intressera sig för undervisningens effektivitet, och särskilt för lärarens utformning av sin undervisning.

Lärande som kommunikation

Skolan karakteriseras av olika kommunikativa aktiviteter. En av de viktigaste aktiviteterna är den språkliga verksamheten och det är därför väsentligt att behärska språket som intellektuellt redskap. Dessutom är det viktigt att se ”släktskap mellan tänkande och kommunikation”[2] som ett centralt inslag i lärandet. Det är genom deltagande i kommunikation som individen möter och kan ta till sig nya sätt att tänka, resonera och handla (Säljö, 2000).

I den här artikeln ses kommunikation som en aktivitet, i vilken man försöker få en interlokutör, det vill säga en person som man samtalar med (som kan vara man själv) att agera eller känna på ett visst sätt (Sfard, 2002). Kommunikationen är effektiv om det kommunikativa syftet uppfylls och om diskursens fokus är klar. Begreppet diskurs används för att beteckna varje specifik kommunikationsakt, verbal eller icke verbal, med andra eller med sig själv, synkron (till exempel kommunikation ansikte mot ansikte) eller asynkron (till exempel läsa en bok, skriva)[3]. Diskursen är en dynamisk process som i första hand reflekteras i hur det matematiska innehållet presenteras i klassrummet. Diskursens fokus kan öppna olika möjligheter för tolkning av och reflektion över innehållet för eleverna. Om tänkandet kommuniceras, så kan den matematiska diskursen som förekommer i klassrummet tolkas som kunskap. I det här fallet innebär lärandet av matematiken en ändring i elevernas deltagande i den matematiska diskursen.

Lärandet av matematiken i skolan utgör en speciell diskurs, det vill säga skolans matematiska diskurs, med vars hjälp eleverna har möjlighet att tolka och reflektera över olika begrepp och deras betydelse. Begreppet skola används här för att markera skillnaden mellan den matematiska diskursen som sker mellan matematiker (det vill säga personer som yrkesmässigt ägnar sig åt matematik) och den diskurs som sker under lärarens instruktion i klassrummet. Den matematiska diskursen karakteriseras bland annat av en metadiskursiv nivå, det vill säga den formas utifrån vad som är känt från tidigare matematiska diskurser, och av användningen av t ex miniräknare och/eller datorer som medierade verktyg.

Diskursen spelar en väsentlig roll i undervisningen och lärandet av algebra, eftersom eleven utvecklar en personlig kunskap om det algebraiska språket, symboler och logik genom att under en tid delta i sociala interaktioner med både läraren och andra elever. Genom deltagande i den algebraiska diskursen bör eleverna ha möjligheter att ge mening åt symboler för att utveckla sina begrepp inom algebra och sitt eget deltagande i respektive diskurs. I undervisningspraktiken är lärare och elever hänvisade till undervisningens och lärandets innehåll. Innehållet, som är fastlagt av Skolverket och som består av olika moment som presenteras i kursplaner, presenteras i klassrummet med hjälp av olika diskursiva kommunikationsmönster, som erbjuder eleverna varierade aspekter i lärandeobjektet (Marton et al., 2004). Dessa aspekter främjar lärande på olika sätt.

Algebra i Matematikkurs B på gymnasienivå

Våren 1994 fastställdes nya kursplaner i matematik av regeringen. Kursplanerna reviderades år 2000 som en följd av intensiva diskussioner som fördes under hösten 1998 kring förslag till en ny struktur i gymnasieskolan. Samtliga kursplaner innehåller nu beskrivningar av syfte, ämneskaraktär och uppbyggnad på olika nivåer. Kursplanernas utformning i relation till kursens omfång uttrycks i gymnasiepoäng, det vill säga omfattningen och utförligheten i målbeskrivningarna i förhållande till hur stor kursen är.

Det finns sju kurser i matematik på gymnasienivå. Matematikkurs B är den andra kursen som läses obligatoriskt på natur- och samhällvetenskapliga programmet. Kursen består av olika moment och ett av dem är algebra. I mål som eleverna ska uppnå står det bland annat att eleven skall:

> /…/
> *kunna tolka, förenkla och omforma uttryck av andra graden samt lösa andragradsekvationer och tillämpa kunskaperna vid problemlösning.*
> (Matematik B, Skolverket, 2000)

I gymnasieskolans kursplan för Matematik B är målet och innehållet som gäller för algebramomentet fastlagt, men det finns inga anvisningar om hur man som lärare ska gå till väga för att uppnå respektive mål. Som citatet ovan visar, är dessa mål relativt kortfattade och komprimerade. Undervisningen i matematik och i synnerhet undervisningen av algebramomenten bör grundas på en analys av målsättningen för respektive kurs. Detta är en viktig utgångspunkt vid valet av innehåll i undervisningen.

Undervisningen formas enligt lärarens sätt att förstå ämnet som helhet. Läraren formar algebra som ett lärandeobjekt och det är mot detta objekt som eleverna riktar sitt medvetande. Lärandeobjektet kan därför variera från lärare till lärare, vilket leder till en variation av vad eleverna får möjlighet att lära sig.

Fokus i min fortsatta presentation ligger i att beskriva hur läraren behandlar det innehåll som har att göra med lösningen av andragradsekvationer i matematikkurs B och vad som är möjligt för eleverna att lära sig. Jag ska med andra ord fokusera på förhållanden mellan de aspekter som lyfts fram i den diskursiva kommunikationen och deras betydelse för elevernas lärande. Min presentation grundar sig på ett omfattande material som insamlades under våren 2003. Materialet består av videoinspelningar, intervjuer, lärares planering och skriftliga prov i två olika undervisningsklasser. I studien deltog 45 elever och två lärare (Maria och Per).

Andragradsekvation – lärarens presentation av innehållet

Marias undervisning är systematiskt upplagd. Varje lektion inleds med en gemensam diskussion i helklass. Vid sådana tillfällen introducerar Maria ett nytt innehåll genom att repetera tidigare introducerade begrepp och därefter praktisera det nya innehållet, det vill säga läraren löser en eller flera uppgifter på tavlan och en interaktion sker i hela klassen. I Pers undervisning introduceras nya moment med hjälp av en uppgift och därefter jobbar eleverna individuellt i sina böcker. Introduktion innebär här att läraren inför hela klassen har en genomgång eller presenterar uppgifter som förekommer i boken. Repetition innebär här att ett innehåll som eleverna har mött tidigare, antingen i tidigare årskurser eller under lektionen innan, behandlas (Runesson, 1999). Respektive uppgifter syftar på introduktionsdelen som presenterades i respektive lektion.

I tabellen nedan kan vi se vilka ekvationer som behandlades i Marias och Pers klasser under två observerade lektioner.

Lektion nr.	**Nr.**	**Maria**	**Moment**	**Lektion nr.**	**Per**	**Moment**
24	1	$x^2 = 144$	repetition	25	$x^2 – 4 = 0$	repetition
24	2	$5x^2 = 845$	repetition	25	$(x + 2)(x – 4) = 0$	introducerar nytt moment
24	3	$4x^2 –13 = 23$	repetition	25	$(x –1)^2 –9 = 0$	praktiserar
24	4	$(x + 14)^2 = 4$	repetition	26	$x^2 – 4x - 5 = 0$	introducerar nytt moment
24	5	$(x + 1)(x – 3) = 0$	introducerar nytt moment			
24	6	$x^2 + 4x = 0$	praktiserar			
25	7	$x^2 – 6x + 9 = 0$	praktiserar			
25	8	$x^2 + 12x + 35 = 0$	introducerar nytt moment			
25	9	$x^2 + px + q = 0$	praktiserar			
25	10	$x^2 + 2x - 15 = 0$	praktiserar			
25	11	$x^2 – 6x + 9 = 0$	praktiserar			
25	12	$x^2 – x - 30 = 0$	praktiserar			
25	13	p	praktiserar			
25	14	$8x^2 – 4x = 0$				

Tabell 1. Ekvationer som behandlas i den gemensamma undervisningsdelen

Som framgår av tabellen ovan, behandlades tre olika moment under de två observerade lektionerna. Det första momentet syftar till att repetera (från Matematikkurs A) hur man löser ett partikulärt fall av andragradsekvationer, nämligen de som innehåller enbart x^2-termen eller att x^2 kan vara representerad med hjälp av ett uttryck (ekvationerna 1, 2, 3 och 4 i Marias klass och 1 i Pers klass). Det andra momentet syftar till att lösa ett annat partikulärt fall av andragradsekvationer, det vill säga de som innehåller x^2-termen och x-termen (ekvationerna 5, 6 och 14 i Marias klass och 2 i Pers klass). Det tredje momentet syftar till att lösa en andragradsekvation som är skriven i allmän form (ekvation 13 i Marias klass, det fattas i Pers klass). I de tre momenten kunde jag identifiera flera lärandeobjekt, men jag kommer enbart att presentera två av dem här: hur man löser en andragradsekvation som är skriven i dels faktorform och dels i normalform. Ekvationerna 5, 6 och 14 i Marias klass och 2 i Pers klass är av samma karaktär, det vill säga de är skrivna (till exempel ekvation 5 i Marias klass och 2 i Pers klass) eller kan skrivas (till exempel ekvationerna 6 och 14 i Marias klass) i faktorform. Eftersom båda lärarna i sin undervisning behandlar en ekvation som redan är skriven i faktorform, ska jag titta närmare på de diskursiva kommunikationsmönstren i det lärandeobjektet.

I Marias diskurs kan vi konstatera att hon fokuserar på att eleverna ska se skillnaden mellan första- och andragradsekvationer genom att fokusera på en viktig aspekt, nämligen att en andragradsekvation alltid innehåller en x^2-term. Följande extrakt från videoinspelningen visar detta. Maria skriver på tavlan: $(x + 1)(x - 3) = 0$

> *L: När man löser en sån där ekvation… Är den förresten en andragradsekvation den här? Där står ju bara x. Där ser jag inte x två på.*

Med hjälp av ekvationerna 6 och 14 kontrasterar Maria olika representationer av den här typen av ekvation. Hon visar att de två ekvationerna kan skrivas i faktorform och på så sätt generaliserar hon hur man löser andragradsekvationer som innehåller x^2 och x-termen.

I Pers diskurs kan vi inte se en sådan kontrast och han poängterar inte heller skillnaden mellan första- och andragradsekvationen. Han löser enbart en ekvation och påstår att en ekvation i faktorform är en andragradsekvation. Följande videosekvens visar detta. Per skriver på tavlan: $(x + 2)(x - 4) = 0$

> *L: Det är en andragradsekvation här och nu ska vi se… här har vi faktiskt en produkt, två faktorer. När kan denna produkt vara noll? Och tittar man här så löser man den rakt upp och ner utan att göra någonting. Två faktorer, när är den första faktorn noll?*

En vidare analys visar att båda lärarna i sina diskurser fokuserar på att visa att en produkt är noll när en av faktorerna är noll. Diskursens fokus och det sätt denna diskurs praktiserades i klassrummet öppnade olika möjligheter för eleverna att tolka och reflektera över lösningen av en andragradsekvation som är skriven i faktorform. Detta reflekteras i första hand i frågorna som eleverna ställde när de individuellt jobbade med liknande uppgifter.

Ralf i Marias klass förstod inte lärarens förklaring gällande lösningen av ekvationen $x^2 + 4x = 0$. Läraren förklarar återigen uppgiften för eleven på följande sätt:

1. E: På den sista du fick x lika med minus fyra (läraren och eleven tittar på tavlan).
   På tavlan står följande:
   $$x^2 + 4x = 0$$
   $$x(x + 4) = 0$$
   $$x_1 = 0 \qquad x + 4 = 0$$
   $$x_2 = -4$$
2. *L: Ja!*
3. E: Hur fick du det? Alltså kan man räkna … jag förstår inte…
4. *L: Alltså x plus fyra är noll, då tar du minus fyra i båda led…*
5. E: Ja, jag förstår nu, ja, men hur fick du x plus fyra?
6. *L: Ja, ju eftersom produkten ska vara noll. Du ser att det står x parentes x plus fyra.*
7. E: Mh.
8. *L: Då måste antingen x vara noll eller parentesen vara noll.*
9. E: Kan parentesen vara noll? Ju, alltså hela…
10. *L: Ju hela, hela den parentesen ska vara noll, alltså x plus 4 som står här. Det är det som är nollprodukt regel. Du har det här (läraren letar och läser vad som står skrivet i uppgift 7417 d).*

I boken står följande förklaringar:

d) $x^2 - 4x = 0$ Bryt ut x!

$x(x - 4) = 0$

Nollproduktmetoden ger

$x \cdot (x - 4) = 0$

$x = 0$ eller $x - 4 = 0$

$x_1 = 0, \quad x_2 = 4$

11. *L: Du kan tänka dig så här, om a gånger b är lika med noll så måste antingen a vara noll eller b vara noll.*

12. E: Ja.
13. *L: Och det är bara att, denna gång så är b en hel parentes, och vad det än står så är det hela parentesen noll.*

Eleven tittar på tavlan.

14. *L: Jag tror…*
15. E: Som till exempel här a som är x då blir noll, då är x - 4 noll.
16. *L: Mh!*
17. E: Å ena sidan så är x lika med noll, sånt….
18. *L: Mh, precis, sen måste du lösa ekvationen x - 4.*
19. E: Ja, då är det klart.

Från respektive diskurs kan vi se att läraren och eleven i början pratar om två olika saker. Läraren pratar om att lösa ekvationen och eleven pratar om när en produkt är noll. Dessutom förstår eleven inte heller hur läraren fick x plus fyra ([5]) vilket pekar på att eleven inte har förstått hur man får fram en ekvivalent ekvation utifrån den ursprungliga ekvationen. Men läraren har inte gett svar på elevens fråga ”hur fick du x plus fyra”. Tack vare lärarens skicklighet och hennes påpekande i boken kunde de så småningom prata om samma sak, nämligen när en produkt är noll. Att kommunikationen var effektiv reflekteras i första hand genom att eleven inte ställde den här frågan i de kommande lektionerna och av att eleven klarade av att lösa ekvationen $x(4 - x) = 0$ på den gemensamma skrivningen. I andra hand kan detta förklaras genom att den valda ekvationen på provet redan var skriven i faktorform. Eleven behövde inte skriva en ekvivalent ekvation. Den här ekvationen kan även skrivas som $(x - 0)(4 - x) = 0$ och detta innebär att den refererar till samma lärandeobjekt som togs upp i den individuella diskursen mellan läraren och eleven och som presenterades i hela klassen.

Patrik i Pers klass förstod inte heller när en produkt är noll utifrån den rådande diskursen i klassen. Han försökte lösa ekvationen $(x + 2)(x - 4) = 0$ men lyckades inte. Läraren hjälpte honom individuellt genom att ge följande förklaringar:

1. *L: Produkten, när är den noll?*
2. E: Aha, om x är noll (ser glad ut)…
3. *L: Om x är (pekar mot tavlan)? Två… ja, två faktorer… produkten, när blir den noll? När en faktor är noll eller den andra är noll…*
4. E: Ja, om x är noll…
5. *L: Nej, om x är noll så blir den ena faktorn två, och den andra minus 4.*
6. E: A…

7. *L: Men när den förste faktorn är noll, vad ska vi ha för x för att den ska bli noll?*
8. Eleven är tyst.
9. *L: x + 2, vad ska vi ha för x?*
10. E: Minus två.
11. *L: Ja, minus två, du har hittat den ena roten…*
12. E: A… nu förstår jag…
13. *L: Ja, ja precis, den andra…*
14. E: Fyra.
15. *L: Javisst, du har hittat nollställena …*

När eleven två gånger i rad säger att x är noll, byter läraren strategi och genom att lyfta fram nya aspekter hjälper han eleven till rätt svar. Vi kan i respektive diskurs se att läraren urskiljer att ekvationen har två rötter, samt hur ekvationens nollställen uppstår. Trots detta ger eleven enbart lösningen $x = 4$ till ekvationen $x(4 – x) = 0$, på provet. En förklaring till detta kan vara att eleven inte uppfattade att respektive ekvation kunde skrivas på formen $(x – 0)(4 – x) = 0$. Detta kan vara en konsekvens av att läraren i sin diskurs inte använde olika representationer för den här typen av ekvationer och inte heller förklarade innebörden i när en produkt är noll.

11 av 20 elever i Marias klass och 12 av 21 elever i Pers klass kunde lösa ekvationen $x(4 - x) = 0$ på den gemensamma skrivningen. Resultaten visar att det fanns elever som inte kunde ge en korrekt lösning till en ekvation som var skriven i faktorform. Analysen av elevernas lösningar pekar på att de elever, som hade svårigheter att lösa den här ekvationen inte har förstått parentesernas betydelse och inte heller när en produkt är noll. Detta kan i Pers fall bero på att han inte kontrasterar olika representationer av en andragradsekvation som enbart innehåller x^2 och x-termerna och i Marias fall på att hon inriktar elevernas fokus på att repetera gamla begrepp (att bryta ut) och inte på att urskilja egenskaperna för att en produkt ska vara noll, trots hennes kontrast i att representera ekvationerna (ekvation 5, 6, 13 och 14). Valet av de olika typerna av andragradsekvationer innebär att eleverna måste hantera flera metadiskursiva nivåer samtidigt, vilket leder till att de inte har fokuserat på att förstå när en produkt är noll.

Det andra lärandeobjektet som kunde identifieras i lärarnas presentation av hur man löser en andragradsekvation syftar på lösningen av andragradsekvationer i normalform, det vill säga av typen $x^2 + px + q = 0$ med p och q skilda från noll.

För att introducera det nya lärandeobjektet löser Maria ekvation 7 genom faktorisering med hjälp av kvadreringsregeln. Ett sådant moment förekommer inte i Pers klass. Uppgift 8 i Marias klass var en förberedande uppgift inför introduceringen av formeln för att lösa en ekvation skriven i normal form. Respektive uppgift löstes i hela klassen genom kvadratkomplettering. På ett likadant sätt visade Maria hur man kommer fram till formeln i uppgift 9 (det är en generalisering av uppgift 8). Maria praktiserade formeln med hjälp av fyra ekvationer och hennes fokus var att lyfta fram koefficienternas betydelse i tillämpningen av formeln och betydelsen av att ekvationen ska vara lika med noll. Hon gör detta genom att kontrastera uppgifterna och urskilja vilka av villkoren som är nödvändiga för tillämpningen av formeln. Samtidigt är Maria noga med att skriva ekvivalenta ekvationer. Hon förklarar hur man kommer från en ekvation till en ekvivalent ekvation på ett detaljerat sätt. Följande sekvens från videoinspelningen visar detta:

Läraren skriver på tavlan: $2x - 3x^2 = -1$

1. *L: Vad säger ni om det här då? Är den färdig för formel? Är den skriven på formen $x^2 + px + q = 0$?*
2. M13: Nej…
3. *L: Nej, det är den inte. Först och främst är detta x^2-termen. Det ska vara positivt (pekar på x^2 i $x^2 + px + q = 0$) det är det inte. Då börjar jag med att göra det positivt och då flyttar jag över det (pekar på $-3x^2$ och högra ledet) och så blir det $3x^2$, och sen ska alltid samlas på en sida för att det ska bli lika med noll, så då fortsätter jag att flytta över (pekar på 2x och höger sida), då blir det minus två x, och vad blir det sen med minus 1?*
4. K15: Plus ett

I Pers undervisning förekom inte de momenten. Han skriver formeln direkt på tavlan och praktiserar respektive formel med hjälp av en enda uppgift. Pers diskurs fokuserar på hur man använder formeln genom att lyfta fram olika beräkningar med tal. När en elev i Pers klass trots detta visar ett allvarligt missförstånd gällande beräkningen av roten ur en summa av tal, tar läraren detta inte på allvar, utan frågar istället en annan elev vad det blir för tal. Läraren fokuserar eleverna på ett annat lärandeobjekt. Detta framgår av följande exempel från videoinspelningen.

Läraren skriver på tavlan:

$x = 2 \pm \sqrt{2^2 + 5}$

1. *L: Och nu råkar det bli himlans bra här, att här står roten ur. Göran?*
2. Göran: Det blir två plus roten ur fem …
3. *L: Två i kvadrat är?*
4. Göran: Två, alltså roten upphöjt till två är två alltså man kan göra det direkt…

5. *L: Och vad skriver du?*
6. Göran: Ja, skriv två, x är lika med 2… du kan skriva x ett …
7. *L: Ja, det kan vi göra sen.. Två…*
8. Göran: Ja.
9. *L: Plus, minus…*
10. Göran: Plus, minus och sen parentes…

Läraren förstår inte.

11. *L: Parentes?*
12. Göran: ja, ja…

Läraren skriver parentes på tavlan och tittar i klassrummet.

13. Göran: Och sen skriver du 2…
14. *L: Två*
15. Göran: Två, ja, sen plus roten ur 5…

Läraren skriver på tavlan:

$x=2 \quad x = 2 \pm (2 + \sqrt{5})$

16. *L: Stopp, stopp, sudda bort detta snabbt.*
17. Göran: Men den det är rätt ju …
18. *L: Klara?*
19. Klara: Två upphöjd till två det är fyra, plus, minus roten ur 9 sammanlagt, för det har du fyra plus fem nio.

Läraren skriver:

$x = 2 \quad \pm\sqrt{9}$

Lärarna fokuserar på olika aspekter av lärandeobjektet. Maria lyfter systematiskt fram villkor under vilka en andragradsekvation kan lösas med hjälp av formeln och Per fokuserar på beräkningsstrategier. Det som lärarna fokuserar på, påverkar elevernas lärande på olika sätt. Detta reflekteras i de frågor som eleverna ställde till lärarna individuellt när de själva praktiserade att lösa liknande ekvationer. De frågorna fokuserade just på sådana aspekter som inte lyftes fram i undervisningen. I Marias klass frågar till exempel Helen om uppgift 7427 c.

Lös ekvationen med lösningsformeln

a) $2x^2 + 24x + 70 = 0$

b) $5x^2 - 50x + 80 = 0$

c) $8z^2 - 8z + 2 = 0$

d) $A(A+10) = 39$

Läraren tittar på vad eleven skrev. Deras diskurs ser ut på följande sätt:

1. *L: Men det är ju rätt…*
2. E: Blir ju det, kan det bli det?
3. *L: Javisst, men det blir en sånt dubbel rot…*
4. E: Aha!
5. *L: Jag kan bara titta, och då blir det ¼.*
6. E: Jaha jag trodde att det var något fel.
7. *L: Nej!*
8. E. Men hur ska jag skriva då?
9. *L: Du kan skriva bara:* $z_1 = z_2 = ½$*. För du får en halv plus noll, en halv minus noll.*
10. E: Ja, ...Ok...

Här kan vi se att Helens osäkerhet ligger i att räkna med tal i bråkform och i det formella sättet att skriva lösningen till ekvationen. I Pers klass ställde Susanna en fråga om hur man löser en andragradsekvation. Diskursen mellan Per och Susanna ser ut på följande sätt:

1. *L: … Din fråga nu?*
2. E: Den här (pekar på en andragradsekvation i boken), det fattar jag inte alls…
3. *L: Ju, det är alltså…*
4. E: Om du tar den som exempel (pekar på följande uppgift i boken: $x^2 – 6x + 5 = 0$).
5. *L: Ja, det är det du får använda formelsamlingen…*
6. E: Aha…
7. *L: Och då…kommer att stå här i formel, kommer att stå att…*

Läraren skriver i sitt anteckningsblock:

$x^2 + px + q = 0$

8. E: Aha, det är samma som står skrivet här (eleven pekar på formeln i boken)…
9. *L: Halva koefficienten med ombytt tecken i kvadrat minus q.*

Läraren fortsätter skriva:

$x = 3 \pm \sqrt{3^2 - 5}$

$x_1 = 3 + 2$

$x_2 = 3 – 2$

10. E: Är det bara så?
11. *L: Ja, det är bara så.*

Här kan vi se att Susanna, som är en av de duktigaste eleverna (enligt lärarens åsikt) i klassen, inte har förstått formelns betydelse i lösningen av en andragradsekvation. Genom att läraren avgränsar diskursen till att lyfta fram sambandet mellan p och q som finns i formeln och –6 och 5 som finns i den givna ekvationen, uppfattade eleven ekvations lösning som lätt (se [10]).

Lärarnas presentation av innehållet liksom vilka aspekter de väljer att lyfta fram påverkar hur eleverna kan hantera respektive innehåll på den gemensamma skrivningen. En av ekvationerna som eleverna hade på provet var: $x^2 + 6x + 5 = 0$. 16 av 20 elever i Marias klass och 12 av 21 elever i Pers klass kunde lösa respektive ekvation. I Marias klass hade elevernas fel en beräkningskaraktär jämfört med Pers elever som visar allvarliga missförstånd i både användningen av själva formeln och beräkningar. Det fanns till exempel tre elever som räknade roten av summan av två tal precis som eleven ovan.

Diskussion

Analysen av de presenterade sekvenserna pekar på att det finns ett samband mellan hur innehållet presenteras, vilka aspekter läraren väljer att lyfta fram av lärandeobjektet och lärarnas förmåga att hantera respektive innehåll i klassrummet. Vilka aspekter man fokuserar på och på vilket sätt man gör detta öppnar olika möjligheter för tolkning av och reflektion över det presenterade innehållet för eleverna. Resultaten visar också att om diskursens fokus är tydligt avgränsat, så leder den till en effektiv kommunikation som i sin tur leder till att elevernas egen diskurs gällande lösningen av andragradsekvationer ändras i en positiv riktning. För att kommunikationen ska vara effektiv krävs det förutom en variation av kritiska aspekter i den presenterade diskursen ett ökat deltagande i respektive diskurs. Vad betyder då allt detta för oss som lärare?

För att eleven ska lära sig något av läraren genom att lyssna på henne eller honom krävs det att eleven och läraren har en språklig gemenskap. Ju mer komplext budskapet är desto större krav ställs på den språkliga gemenskapen: man måste ha en gemensam diskurs (intellektuell och begreppsmässig gemenskap). Även små skillnader i uttryckssätt kan spela stor roll för den totala förståelsen (se tex Ralf och Maria). Talaren vill kommunicera ett visst tankeinnehåll och har ett mycket stort antal möjliga språkliga uttryck till sitt förfogande. Uppgiften är att välja ett uttryck som är adekvat för lyssnaren. Lyssnaren å sin sida uppfattar det språkliga uttrycket och har ett mycket stort antal möjliga innehåll att välja mellan. Uppgiften är att urskilja de viktigaste aspekterna av lärandeobjektet. Som lärare måste man vara observant på detta och hantera sitt stoff på ett sådant sätt att eleverna får möjlighet att fokusera på de kritiska aspekterna i innehållet för att inte förlora fokus på grund av bristande förståelse i den diskursiva kommunikationen.

Referenser

Before It's Too Late: A report to the Nation from The National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21st Century (2000). The John Glenn Commission, USA.

Marton. F., & Tsui. A. B. M. (2004). *Classroom discourse and the space of learning.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll.* Göteborg: Acta Universitatis

Sfard, A. (2002). The interplay of intimations and implementations: Generating new discourse with new symbolic tools. *The Journal of Learning Sciences, 11,* 319–357.

Skolverket (2000). *Skolverkets föreskrifter om kursplaner och betygskriterier för kurser i ämnet matematik i gymnasieskolan*, SKOLFS 2000:5

Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken. Ett sociokulturellt perspektiv.* Stockholm. Prisma

Noter

[1] Se till exempel olika tidningsdebatter och artiklar i exempelvis *Tidskrift för matematikundervisning – Nämnaren*

[2] Se Säljö 2000, s 115

[3] Se Sfard 2002