Matematiska modeller

Örjan Hansson, Högskolan Kristianstad

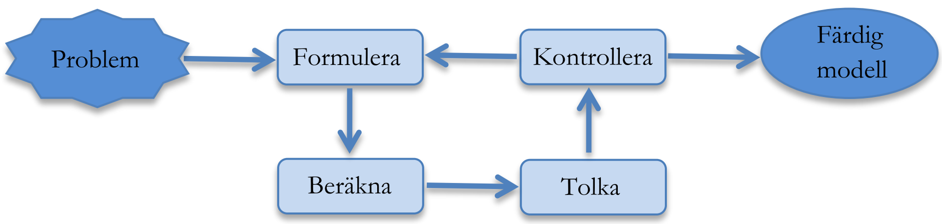
Att arbeta med modelleringsuppgifter i undervisningen innebär att elever utifrån olika vardagliga och andra utommatematiska situationer skapar och använder en matematisk modell. Det innefattar att tolka resultat som den matematiska modellen ger samt utvärdera modellen och att klargöra dess begränsningar och förutsättningar. Modelleringsprocessen innebär ett utforskande arbetssätt där elever prövar, diskuterar och justerar sin modell. Det är ett arbetssätt som leder till ett aktivt lärande och ett mer produktivt sätt att tänka i matematik (Lesh & Zawojewski, 2007). Genom modelleringsaktiviteter kan elever även på ett naturligt sätt komma i kontant med situationer som visar olika tillämpningar av matematik och dess betydelse för andra ämnesområden.

Konstruktion av ett kvantitativt mått

Vi kan hämta många modelleringsuppgifter ur vår vardag. En sådan uppgift kan till exempel bestå i att beskriva olika relationer med kvantitativa mått, som hur nära ett rektangulärt objekt (en bordskiva, en matta, en tavelram, en plåtbit, en kakelplatta etc.) är en kvadrat till sin form. Uppgiften tas upp i en problemsamling som skapades i samband med Balanced Assessment in Mathematics Program vid Harvard Graduate School of Education (Concord Consortium, 2007). Vi kan exempelvis introducera uppgiften som sålunda:

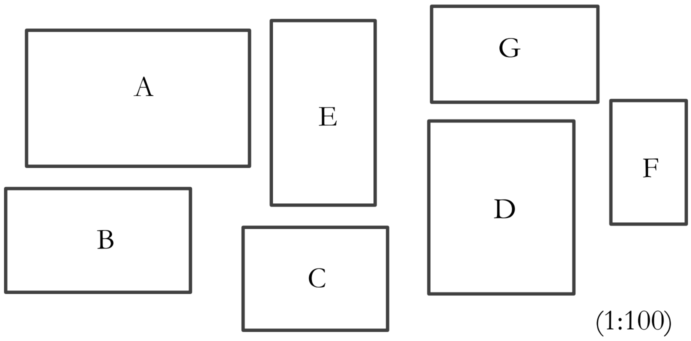
> Ebbe och Siri besöker en möbelaffär för att köpa ett matbord och vill att bordsskivan ska ha form av en kvadrat. I möbelaffären finns matbord med rektangulära bordsskivor men inget där bordsskivan är en kvadrat. De bestämmer sig då för att köpa det matbord där bordskivan är mest lik en kvadrat. Hjälp dem att bestämma en metod för att avgöra vilken bordsskiva som är mest lik en kvadrat.

Uppgiften innebär att eleverna formulerar ett mått som anger hur nära en rektangel är en kvadrat till sin form och hur detta mått förändras då rektangeln ändrar form. Uppgiften kan användas för olika kurser och ger eleverna möjlighet att utforma egna modeller, att jämföra sina modeller och diskutera för- och nackdelar med olika modeller. Eleverna deltar i en process där de formulerar ett mått, genomför beräkningar för måttet, tolkar och kontrollerar sina resultat, som kan innebära en omformulering av måttet, se figur 1.



Figur 1. Schematisk bild av arbetsprocessen vid modellering.

För att underlätta jämförelser av olika modeller är det lämpligt att dela ut ett papper med en uppsättning rektanglar, se figur 2.



Figur 2. En uppsättning rektangulära bordsskivor.

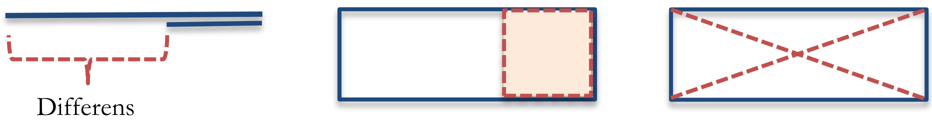
Erfarenheter av uppgiften

Erfarenheterna från Balanced Assessment visar att elever i hög grad baserar sina modeller på längden av rektangelns sidor. Det är vanligt att de använder differenser av rektangelns höjd H och bas B, som $H–B$ eller $(H–B)/(H+B)$. En del uppmärksammar då att deras mått kan ge negativa värden och bortser från tecknet för att arbeta med icke-negativa mått. Måtten som eleverna utformar under första delen av modelleringsprocessen ger ofta olika värden för likformiga rektanglar, för att åtgärda detta kan de utnyttja att förhållandet mellan sidorna är konstant. Det händer då att elever låter måttet bestå av kvoten H/B som de sedan vidareutvecklar för att få samma värde då rektangeln roterar 180° som i fallet $(H/B + B/H)/2$. Uppgiften ger eleverna möjlighet att utforma sina modeller på många olika sätt och det förekommer även att de basera måtten på rektangelns area eller skärningsvinkeln mellan rektangelns diagonaler. Vi ska närmare studera tre modeller i följande avsnitt.

En jämförelse av olika mått

Vi ska nu se närmare på vad det kan innebära att arbeta med uppgiften och utgår från (se figur 3):

I. differensen mellan rektangelns längsta och kortaste sida,
II. förhållandet mellan arean av rektangeln och den i rektangeln största inskrivna kvadraten.
III. förhållandet mellan största skärningsvinkeln för diagonalerna och en rät vinkel.



Figur 3. Illustration av modell I, II och III.

Om vi till exempel beräknar måttet för en rektangel med sidorna 3 och 7 längdenheter så får vi i fall I: $7–3 = 4$, i fall II: $3 \cdot 7/3 \cdot 3 = 7/3 = 2{,}33$ och i fall III: $134/90 = 1{,}5$ där största skärningsvinkeln är 134 grader. Vi ser även att beräkningen av mått II kan förenklas till 7/3 och måttet kan likaväl formuleras som: förhållandet mellan rektangelns längsta och kortaste sida.

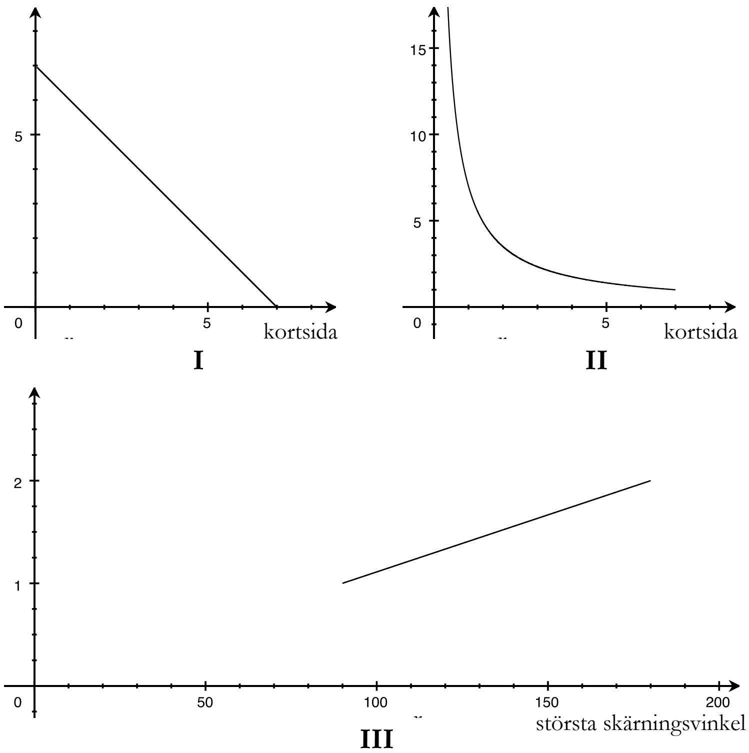
Hur måtten förändras

Vi kan tydliggöra hur måtten förändras med hjälp av en tabell där rektangelns kortsida varierar och långsidan är 7 längdenheter som i vårt tidigare räkneexempel, se tabell 1.

Tabell 1

Måttens värde då långsidan är konstant 7 medan kortsida och största skärningsvinkel varierar

Långsida	7	7	7	7	7	7	7	7
Kortsida	0,5	1	2	3	4	5	6	7
Skärningsvinkel	172	164	148	134	121	109	99	90
I	6,5	6	5	4	3	2	1	0
II	14	7	3,5	2,33	1,75	1,4	1,17	1
III	1,91	1,82	1,65	1,48	1,34	1,21	1,10	1



Figur 4. Måttens grafer då långsidan är konstant 7.

Det framgår av tabellen att måtten avtar då kortsidan ökar (största skärningsvinkeln minskar) och rektangelns form närmar sig en kvadrat, medan måtten växer då den största skärningsvinkeln ökar (kortsidan minskar) och rektangeln blir allt mindre lik en kvadrat, jämför med figur 4. Mått I och III är båda begränsade medan mått II är obegränsat.

Hur modellerna påverkas av skala

För att vidare undersöka modellernas egenskaper och begränsningar kan vi halvera rektangelns sidor. Då ändras rektangelns storlek men den behåller sin form. Tabellvärdena förändras för mått I men inte för mått II och III, se tabell 2. Mått II och III är oberoende av skala, till skillnad från mått I. En modell som mäter hur nära en rektangel är en kvadrat till sin form blir mer användbar om den är oberoende av skala. För att pröva detta kan vi inkludera likformiga rektanglar bland de rektanglar som eleverna arbetar med – som A och F i figur 2, vidare är B och E lika stora.

Tabell 2

Måttens värden då rektangelns sidor har halverats

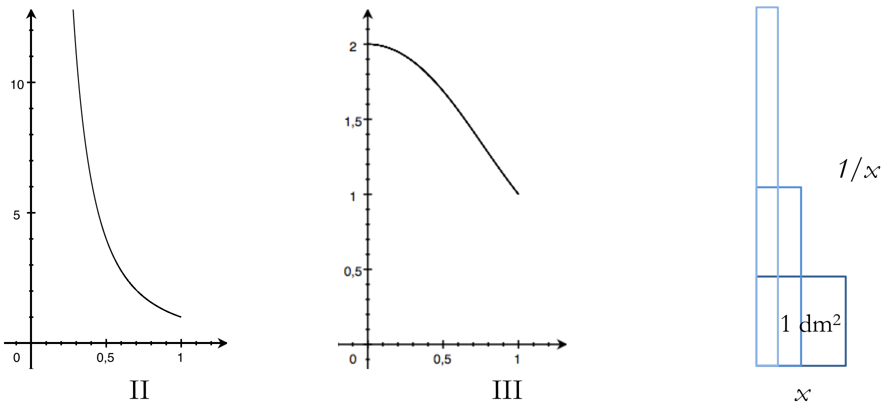
Långsida	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5
Kortsida	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
Skärningsvinkel	172	164	148	134	121	109	99	90
I	3,25	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0
II	14	7	3,5	2,33	1,75	1,4	1,17	1
III	1,91	1,82	1,65	1,48	1,34	1,21	1,10	1

Modellernas olika samband

Om vi låter x och y vara längden av rektangelns kortsida respektive långsida och v den största skärningsvinkeln mellan diagonalerna, så kan måtten skrivas som (I) $y–x$, (II) y/x, respektive (III) $v/90$. Vi ser speciellt att mått III är direkt proportionell mot v. I våra tidigare beräkningar var långsidan konstant 7 och vi lät kortsidan x variera. Mått I gav då ett linjärt samband $7–x$ och mått II en omvänd proportionalitet $7/x$, jämför med figur 4.

Rektanglar med lika area

Vi kan utnyttja att mått II och III är oberoende av skala och begränsa oss till att studera rektanglar med lika area, för att undersöka hur måttet förändras då rektangels form ändras. Låt till exempel rektanglarnas area vara 1 dm². Om x och y är rektangelns kortsida respektive långsida blir $xy = 1$, så $y = 1/x$, där $0 < x \leq 1$ och $1 \leq y$. Mått II kan nu anges med *en* variabel vilket underlättar en studie av modellen – vi får $y/x = (1/x)/x = 1/x^2$. Man kan även bestämma mått III utifrån kortsidan x genom att ta fasta på $\tan(v/2) = y/x$. Om rektangelns area är 1 dm² får vi $\tan(v/2) = 1/x^2$ vilket kan utnyttjas för att beräkna $v/90$. Speciellt är mått III inte direkt proportionell mot x till skillnad från v, jämför med figur 5.



Figur 5. Måttens grafer för rektanglar med lika area.

Fler exempel på modelleringsuppgifter

Knutar på ett rep

Slå en knut på ett rep. Hur mycket kortare blir repet? Slå fler knutar på repet och mät repets längd för varje ny knut. Upprepa för rep av olika tjocklek. Ställ upp en matematisk modell som för varje rep anger hur mycket kortare repet blir då man slår x knutar på repet. Vilka förutsättningar krävs för att modellerna ska fungera? Hur stort kan x vara?

Kommentarer: Uppgiften kan lösas experimentellt där elever får tillgång till rep av olika tjocklek. Genom att plotta längden y av repet mot antalet knutar x i ett koordinatsystem så framgår det att vi har ett linjärt samband. Anpassar man en rät linje efter mätdata så ger det $y=kx+m$ där m är längden av repet och k längdskillnaden då man slår en knut på repet ($k = l - b$ där l är den längd rep knuten innehåller och b knutens bidrag till repets längd). Vi får olika lutning på linjerna beroende på repets tjocklek. Modellerna förutsätter att knutarna är lika stora och att man drar åt knutarna ungefär lika hårt så att längdskillnaderna blir konstant. Det finns även en övre gräns för hur många knutar man kan slå på repet som av praktiska skäl är mindre än m/l. I uppgiften ställer man upp en modell för varje rep. Uppgiften kan vidareutvecklas så att man även ställer upp en matematisk modell för hur repets längdskillnad varierar beroende på repets tjocklek.

Brädor från en tall

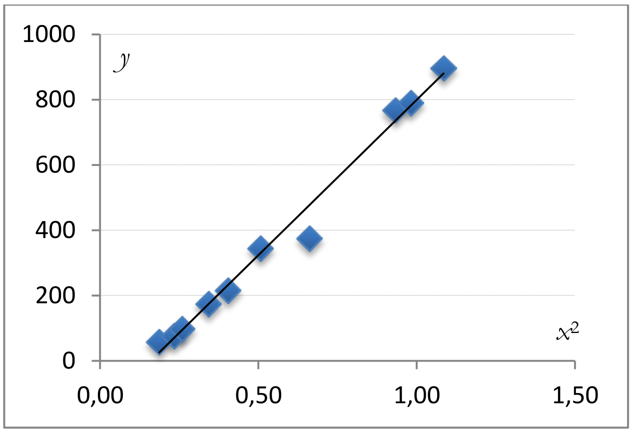
Anta en tall sågas upp i 2,5 cm tjocka och 30 cm breda brädor. Utforma två matematiska modeller som anger hur många meter brädor man får då tallens diameter (mätt ca 1,3 m över marken) varierar. Använd nedanstående tabell för att testa modellerna.

Tallens diameter (m)	0,43	0,48	0,51	0,58	0,64	0,71	0,81	0,97	0,99	1,04
Brädor (m)	58	76	98	174	216	344	375	768	789	896

a) Utgå i ena modellen från att tallarna har formen av en cylinder och ungefär samma höjd.

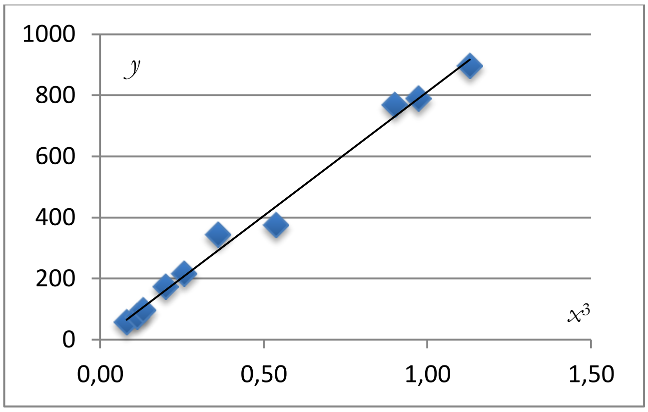
b) Utgå i andra modellen från att tallarna har formen av en cylinder och att höjden är proportionell mot diametern.
c) Jämför de två modellerna. Vilken modell tycks fungera bäst?

Kommentarer: (a) Låt x och y ange tallens diameter respektive antal meter brädor. Trädet har volymen $\pi h(x/2)^2$ m^3, där höjden h är konstant. Brädans volym är $0{,}25 \cdot 0{,}30 \cdot 1 = 0{,}075$ m^3 per meter. Vi får därmed $y = \pi h(x/2)^2/0{,}075$. Alltså, $y = kx^2$ där $k = \pi h(1/2)^2/0{,}075$ så y är proportionell mot x^2. Vi kan undersöka om modellen är rimlig med hjälp tabellvärdena och plotta y mot x^2, se figur 6. Genom att dra en linje som ansluter väl till punkterna får vi $y = 951x^2–152$. Tabellvärdena ger alltså inget bra stöd åt modellen $y = kx^2$.



Figur 6. Tabellvärdena där y plottats mot x^2.

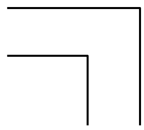
(b) Om vi låter tallens höjd h vara proportionell mot diametern x, dvs. $h = cx$, så blir trädets volym $\pi h(x/2)^2 = \pi cx(x/2)^2$. Brädans volym är 0,075 m^3 per meter och vi får $y = \pi cx(x/2)^2/0{,}075$. Alltså, $y = kx^3$ där $k = \pi c(1/2)^2/0{,}075$ så y är proportionell mot x^3. Utnyttja tabellvärdena och plotta y mot x^3, se figur 7. Linjen $y = 811{,}2x^3–0{,}07$ ansluter väl till punkterna. Vi får en modell $y = 811x^3$ som stämmer väl överens med tabellvärdena.



Figur 7. Tabellvärdena där y plottats mot x^2.

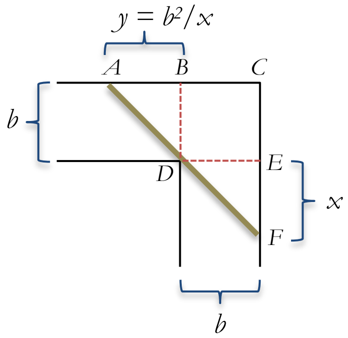
(c) Av ovanstående framgår att antagandet i uppgift b leder till en bättre matematisk modell än antagandet i uppgift a.

Stegar och hörn



Två personer ska bära en stege till ett förråd. De kommer då att passera flera hörn av olika bredd och vill först undersöka om det är möjligt att transportera stegen den tänkta vägen. Utforma en modell som de kan använda för att avgöra om stegen kan passera ett hörn. Gången är lika bred på vardera sidan om ett hörn.

Kommentarer: Vi kan anta att stegen bärs parallellt med marken. Betrakta den rätvinkliga triangel ACF i figur 8. Hypotenusan minimeras då triangeln ACF är likbent. Det kan man inse på flera olika sätt. Ett sätt är att mäta hypotenusan i triangeln ACF och göra en tabell. Ett annat sätt är att konstatera att trianglarna ABD och DEF i figur 8 är likformiga, så $y/b = b/x$, dvs. $y = b^2/x$, och sträckan AF blir $\sqrt{x^2+b^2}+\sqrt{(b^2/x)^2+b^2}$. Eftersom x ökar mer än vad b^2/x minskar då $x \geq b$ så minimeras sträckan AF när $x = b$. Stegens längd kan därmed högst vara $2\sqrt{2}b \approx 2{,}83b$. En tumregel är följaktligen att stegen ska vara kortare än 2,8 gånger bredden av gången för att passera ett hörn.



Figur 8. En stege i ett hörn.

En rulle hushållspapper

a) Utforma en matematisk modell som anger hur många meter en rulle hushållspapper innehåller.

b) Anta att hushållspapperet används i samband med olika rutinartade städuppgifter. Ställ upp en matematisk modell som anger efter hur många dagar en rulle hushållspapper tar slut.

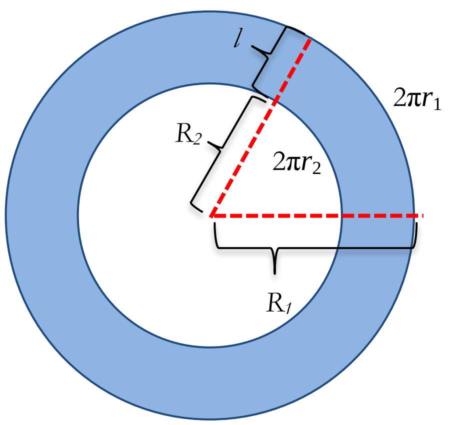
Kommentarer: (a) Vi kan till exempel betrakta ett tvärsnitt av pappersrullen där den inre och yttre cirkeln har radien r respektive R. Tvärsnittsarean blir då $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$. Rullar vi ut hela pappersrullen så motsvarar denna tvärsnittsarea lt där l är den sökta längden och t papperstjockleken. Följaktligen är $lt = \pi(R^2 - r^2)$ så $l = \pi(R^2 - r^2)/t$. Ett annat sätt att resonera är att addera hushållspapper lager för lager, där yttersta lagret är $2\pi R$ nästa lager är $2\pi(R-t)$ o.s.v. för att få summan $2\pi R + 2\pi(R-t) + 2\pi(R-2t) + \ldots + 2\pi r = 2\pi(R + (R-t) + (R-2t) + \ldots + r) = 2\pi(R+r)n/2$ där n är antalet termer, dvs. antalet lager $n = (R-r)/t$, så $2\pi(R+r)n/2 =$

$\pi(R+r)(R-r)/t = \pi(R^2-r^2)/t$ vilket ger samma formel som tidigare. (b) Om vi antar att man i genomsnitt förbrukar längden x hushållspapper per dag så tar det $(\pi(R^2-r^2)/t)/x = \pi(R^2-r^2)/(tx)$ dagar innan hushållsrullen är slut. Men, det är rimligt att anta att man använder en längre bit hushållspapper om papperet är tunnar och en kortare bit om papperet är tjockare. Den genomsnittliga förbrukningen av hushållspapper är alltså snarare knuten till volym än längd. Om vi i genomsnitt använder volymen v hushållspapper per dag får vi $v = xtb$, där b är rullens bredd. Så $x = v/tb = k/t$ där $k = v/b$; den förbrukade längden x är alltså omvänt proportionell mot tjockleken t. Vi får att rullen räcker $\pi(R^2-r^2)/(tx) = \pi(R^2-r^2)/k$ dagar.

En rullande plastmugg

En plastmugg rullar iväg på golvet.
a) Hur ser den bana ut som muggen färdas längs?
b) Fundera över hur plastmuggens dimensioner påverkar banans utseende. Skissa några olika banor som illustrerar vad du kommer fram till.
c) Ställ upp en matematisk modell som beskriver plastmuggens bana.
d) Utnyttja modellen för att undersöka hur plastmuggens dimensioner kan förändras utan att banan ändras.

Kommentarer: (a) Plastmuggen färdas i en sluten cirkulär bana, se figur 9. (b) Banans utseende påverkas av muggens öppningsradie r_1, bottenradie r_2, och sidans längd l. Genom att studera muggar av olika form kan man iaktta olika samband, som att banan kröker mer och bildar en mindre cirkel då differensen $r_1 - r_2$ ökar eller l minskar ($r_1 > r_2$). (c) Vi fortsätter med att beräkna banans yttre radie R_1 och inre radie R_2, se figur 9. Cirkelsektorerna för banans inre och yttre cirkel är likformiga vilket innebär att $R_2/(l+R_2) = 2\pi r_2/2\pi r_1$ som ger $R_2 = l\, r_2/(r_1 - r_2)$, vidare är $R_1 = R_2 + l$.



Figur 9. Muggens cirkulära bana samt cirkelsektorn då muggen rullar ett varv kring sin egen axel.

(d) För att två plastmuggar med olika form ska ha samma bana så måste förstås deras banor ha samma bredd (dvs. sidolängd l) och samma inre radie. Genom att utnyttja formeln för banans inre radie får vi $l\, r_2/(r_1 - r_2) = l\, s_2/(s_1 - s_2)$, där s_1 och s_2 är öppningsradien respektive bottenradien för den andra muggen. Så $r_2/(r_1 - r_2) = s_2/(s_1 - s_2)$, förläng högerledet med en konstant k så att $r_2 = ks_2$. Då blir $r_2/(r_1 - r_2) = ks_2/k(s_1 - s_2) = ks_2/(ks_1 - ks_2) = r_2/(ks_1 - r_2)$ vilket ger $r_1 = ks_1$. Muggarna har alltså samma bana om sidolängden l är lika och $r_1/s_1 = r_2/s_2 = k$ dvs. $r_1/r_2 = s_1/s_2 = k$. Banan bli alltså oförändrad då sidolängden är oförändrad och förhållandet mellan öppningsradien och bottenradien är konstant.

Problemsamlingar

Den inledande uppgiften om rektangulära former var inspirerad av ”Square-Ness” i problemsamlingen från Balanced Assessment (Concord Consortium, 2007). Uppgiften kan enkelt anpassas till olika geometriska figurer och man kan till exempel undersöka hur nära en triangel är en liksidig triangel till sin form eller hur nära en parallellogram är en rektangel till sin form. Pröva själv att konstruera en uppgift eller låt eleverna konstruera uppgifter för andra geometriska objekt. Att konstruera kvantitativa mått för hur ”nära”, ”bra” eller ”lika” något är i form, skick, prestation etc. kan man göra i många olika sammanhang och mäta med olika metoder och modeller. Uppgifternas karaktär innebär att de ofta kan användas i flera kurser med modeller baserade på olika matematiskt innehåll.

Andra exempel på s.k. ”Ness”-uppgifter är bl.a. Bumpy-Ness (ojämnheter på sfäriska objekt), Compact-Ness (täthet av punktkluster), Curvy-Ness (vägkurvors krökning), Disc-Ness (cylinderformade objekt), Fit-Ness (vägdragning). Samtliga uppgifter är tillgängliga via hemsidan för Balanced Assessment. Problemsamlingen innehåller uppgifter av olika karaktär som alla är graderade efter hur väl de knyter an till modelleringsaktiviteter. Uppgifterna är även graderade efter vilket område inom matematik som berörs och vilka framträdande idéer uppgiften rymmer. Erfarenheter om uppgifterna från projektet samt bedömningsanvisningar finns också angivna.

En svensk resurs är Strävorna vid Nationellt centrum för matematikutbildning som ger förslag på modelleringsuppgifter för grundskolan och gymnasieskolan. Här finns också en indelning av uppgifter där man tar fasta på olika områden i matematik som algebra, sannolikhet och statistik, geometri, samband och förändring etc.

Referenser

Concord Consortium (2007). Balanced Assessment in Mathematics. Hämtad (2013-02-22) från http://balancedassessment.concord.org/hl002.html

Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.). *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing.