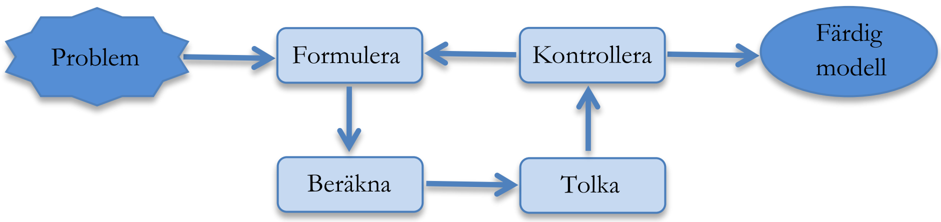
Modul: Samband och förändring
Del 5: Konstruktion av uppgifter

Matematiska modeller inom samband och förändring

Örjan Hansson, Högskolan Kristianstad

Öppna uppgifter som rymmer modelltänkande och modelleringsaktiviteter är ett naturligt inslag inom samband och förändring. Istället för att arbeta med uppgifter i avgränsade sammanhang med tillgång till facit, så innebär modelleringsprocessen ett utforskande arbetssätt där man i utformningen av modellen prövar, diskuterar och justera sin modell, se figur 1. Detta är ett arbetssätt som leder till ett mer produktivt sätt att tänka i matematik (Lesh & Zawojewski, 2007). Vi kommer här även i kontakt med en situation som gör matematikkunskaper värdefulla inom många ämnesområden, som naturvetenskap, samhällsvetenskap, teknik och ekonomi, där man har behov av att skapa modeller för att kunna beskriva och analysera olika fenomen.



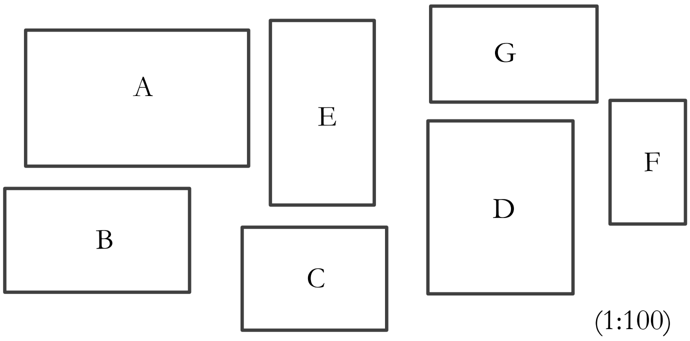
Figur 1.

En öppen uppgift

Vi kan hämta många modelleringsuppgifter ur vår vardag. En sådan uppgift kan till exempel bestå i att beskriva olika relationer med kvantitativa mått, som hur likt ett rektangulärt objekt (en bordskiva, en matta, en tavelram etc.) är en kvadrat till sin form. Uppgiften tas upp i en problemsamling som skapades i samband med Balanced Assessment in Mathematics Program vid Harvard Graduate School of Education (Concord Consortium, 2007). Man kan introducera uppgiften som:

> Ebbe och Siri besöker en möbelaffär för att köpa ett matbord och vill att bordsskivan ska ha form av en kvadrat. I möbelaffären finns matbord med rektangulära bordsskivor men inget där bordsskivan är en kvadrat. De bestämmer sig då för att köpa det matbord där bordskiva är mest lik en kvadrat. Hjälp dem att bestämma en metod för att avgöra vilken bordsskiva som är mest lik en kvadrat.

Uppgiften innebär att eleverna formulerar ett mått som anger hur nära en rektangel är en kvadrat till sin form och hur detta mått förändras då rektangeln ändrar form. Uppgiften kan användas för olika årskurser och ger eleverna möjlighet att utforma egna modeller, att jämföra sina modeller och diskutera för- och nackdelar med olika modeller. Eleverna deltar i en process där de formulera ett mått, genomför beräkningar för måttet, tolkar och kontrollera sina resultat, som kan innebära en omformulering av måttet, se. figur 1. För att underlätta jämförelser av olika modeller är det lämpligt att dela ut ett papper med en uppsättning rektanglar, se figur 2.



Figur 2.

Erfarenheter av uppgiften

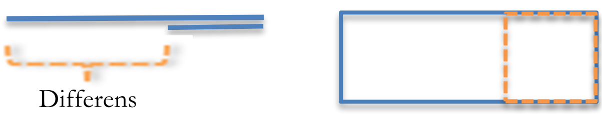
Erfarenheterna från Balanced Assessment visar att eleverna i hög grad baserar sina modeller på längden av rektangelns sidor. Om H och B är rektangelns höjd respektive bas så är det vanligt att de studerar differenser av H och B. En del elever uppmärksammade då att deras mått, som $H–B$ eller $(H–B)/(H+B)$, kan ge negativa värden och bortsåg från tecknet för att arbeta med icke-negativa värden. Det förekom även att eleverna använde kvoten H/B då de beskrev hur nära rektangeln är en kvadrat till sin form; nackdelen med denna modell är att måttet ger det inverterade värdet B/H då man roterar rektangeln 180°. För att åtgärda denna brist fanns det elever som under modelleringsprocessen ändrade sin modell till $(H/B + B/H)/2$. Det förekom även att eleverna utformade modeller där de jämförde arean med höjden eller basen, eller att de undersökte skärningsvinkeln mellan rektangelns diagonaler.

En jämförelse av två modeller

Vi ska nu se närmare på vad det kan innebära att arbeta med uppgiften. Modellerna kan utformas på många olika sätt. Vi ska ta fasta på längden av rektangelns sidor samt arean av rektangeln och beräkna (se figur 3):

I. differensen mellan rektangelns längsta och kortaste sida,
II. hur många procent större rektangelns area är än arean av den största kvadrat som ryms i rektangeln.

I det fall rektangeln är en kvadrat så blir båda måtten noll.



Figur 3.

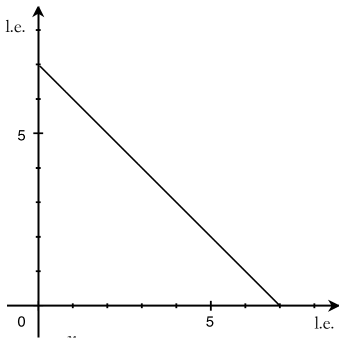
Om vi till exempel ska beräkna måttet för en rektangel med sidorna är 3 och 7 längdenheter så får vi i fall I: $7–3=4$, och i fall II: $(3\cdot 7–3\cdot 3)/3\cdot 3=(7–3)/3=1{,}33$ dvs. 133%. Vi ser även att beräkningen av mått II kan förenklas till $(7–3)/3$ och likaväl formuleras som: hur många procent längre rektangelns långsida är än dess kortsida.

Hur måtten förändras

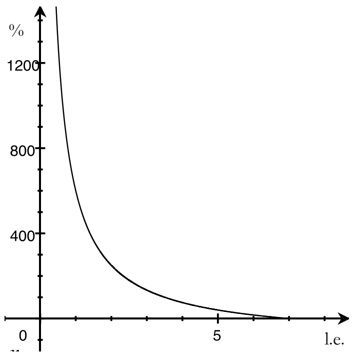
Vi kan tydliggöra hur de två måtten förändras med hjälp av en tabell där rektangelns kortsida varierar och långsidan är 7 längdenheter som i vårt tidigare räkneexempel, se figur 4. Det framgår av tabellen att måtten avtar för att blir noll då kortsidan ökar och rektangelns form närmar sig en kvadrat. Om vi istället minskar kortsidan så blir rektangelns form allt mindre lik en kvadrat och mått I närmar sig långsidans längd medan mått II växer obegränsat. Genom att uppmärksamma måttens olika intervall kan man föra en diskussion om strategier för gradering av koordinataxlar. Kortsidan i rektangeln kan anta alla värden som är större än 0 och mindre än eller lika med 7, och vi kan utnyttja tabellen för att rita måttens grafer, se figur 5.

Långsida	7	7	7	7	7	7	7	7
Kortsida	0,5	1	2	3	4	5	6	7
I	6,5	6	5	4	3	2	1	0
II	1300	600	250	133	75	40	17	0

Figur 4.



I



II

Figur 5.

Hur modellerna påverkas av skala

Vad händer om vi halverar rektangelns sidor? Då ändras rektangelns storlek men den behåller sin form. Tabellvärdena förändras för mått I men inte för mått II, se figur 6. Mått II är oberoende av skala, till skillnad från mått I. En modell som mäter hur lik en rektangel är en kvadrat till sin form bör vara oberoende av skala. För att pröva detta kan vi inkludera likformiga rektanglar bland de rektanglar som eleverna arbetar med – som A och F i figur 2, vidare är B och E lika.

Långsida	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5
Kortsida	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
I	3,25	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0
II	1300	600	250	133	75	40	17	0

Figur 6.

Modellernas olika samband

Om vi låter x och y vara längden av rektangelns kortsida respektive långsida kan måtten skrivas som (I) $y–x$ respektive (II) $100(y–x)/x$. I våra tidigare beräkningar var långsidan konstant 7 och vi lät kortsidan x variera. Mått I gav då $7–x$ och mått II gav $100(7–x)/x$ där $0<x\leq 7$, jämför med figur 5.

Fler uppgifter

Uppgiften som vi här behandlat kan enkelt anpassas till olika geometriska figurer, som att undersöka hur nära en triangel är en liksidig triangel till sin form, eller hur nära en parallellogram är en rektangel till sin form etc. Pröva att själv formulera en uppgift! Att undersöka hur ”nära” något är kan behandlas i olika sammanhang och mätas med olika modeller som leder till diskussioner om samband och förändring inom många områden i matematik. Uppgifternas karaktär innebär att de kan användas i olika årskurser med modeller som har olika matematiskt innehåll. Den uppgift som vi här arbetat med kallas ”Square-Ness” och ingår i en samling av s.k. ”-Ness”-uppgifter i problemsamlingen från Balanced Assessment (Concord Consortium, 2007).

Referenser

Concord Consortium (2007). Balanced Assessment in Mathematics. Hämtad (2013-02-22) från http://balancedassessment.concord.org/index.html.

Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.). *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing.