Modul: Samband och förändring
Del 1: Öppna uppgifter

Samband och förändring för årskurs 1-3

Ingemar Holgersson, Högskolan Kristianstad

Problem om *samband och förändring* spänner över stora delar av skolmatematiken och kan studeras i många olika sammanhang, som geometri, algebra, och statistik. Elever arbetar till exempel med *samband och förändring* i anslutning till geometri då de undersöker hur area och omkrets för en kvadrat förändras när sidans längd varierar. Andra exempel är då elever i ord beskriver hur olika mönster förändras, eller då de med olika typer av diagram redovisar samband mellan olika storheter i statistik. De problemställningar som ingår i kunskapsområdet *samband och förändring* har det gemensamt att de i allmänhet innehåller en mer eller mindre tydligt angiven beroenderelation som undersöks. Dessa relationer kan illustreras med olika uttrycksformer, som t ex numeriska, grafiska och algebraiska. Även om *samband och förändring* är ett kunskapsområde som inte uttryckligen har angivits i tidigare kursplaner har skolan ändå arbetat med problem som faller inom detta område. Att detta kunskapsområde nu lyfts fram i kursplanen är en del av en internationell trend där studier av *samband och förändring* har identifierats som ett centralt område i matematik.

Det innehåll som tas upp under rubriken *samband och förändring* i det centrala innehållet för årskurs 1-3 är ”olika proportionella samband däribland dubbelt och hälften”(Skolverket, 2011,s.64).

Enkla proportionella samband kan uttryckas på olika sätt till exempel muntligt, skriftligt, med konkret material, med bilder, och med symboler. Dessa uttrycksformer kan hjälpa oss att bättre förstå en förändring eller ett samband. Uttrycksformerna kan till exempel vara olika bilder, tabeller eller diagram, och utökas successivt under skolåren till att även omfatta grafer och algebraiska uttryck. Det ger nya förutsättningar för att studera samband mellan olika storheter som till exempel vikt och pris, avstånd och tid, ordningstal och mönster, antal och kostnad, längd och area, höjd och volym. Efter hand flyttas fokus från att först göra jämförelser, som större än, mer än eller fler än, till att kunna mäta och genomföra beräkningar och vidare till att med hjälp av algebra kunna formulera relationer mellan olika storheter.

Men rikedomen av problemställningar inom området är större än så. Därför finns det här anledning att beskriva fler av de problemställningar som finns inom området och som lyfts fram i kommentarmaterialet till kursplanen i matematik (Skolverket, 2011).

Exempel inom tals användning – absoluta och relativa jämförelser

När eleven lär sig att bestämma antal, möter eleven många problemsituationer som handlar om förändringar. Ett typexempel är situationer där något läggs till eller tas bort. Med utgångspunkt i sådana händelser kan problem formuleras av olika svårighetsgrad. Det kan göras genom att inte enbart fråga efter resultatet, utan även genom att formulera problem där förändringens storlek efterfrågas, eller till och med hur mycket det fanns från början. Ett exempel på sådana händelser är:

> *Nora har 8 kronor i fickan. Hon hittar 5 kronor på marken. Hur många kronor har hon då?*
>
> *Nora har 8 kronor. Hon hittar några kronor på marken. Då har hon 13 kronor. Hur många kronor hittade hon?*
>
> *Nora hittar 5 kronor på marken och lägger dem i sin ficka. Då har hon 13 kronor i fickan. Hur många kronor hade hon från början?*

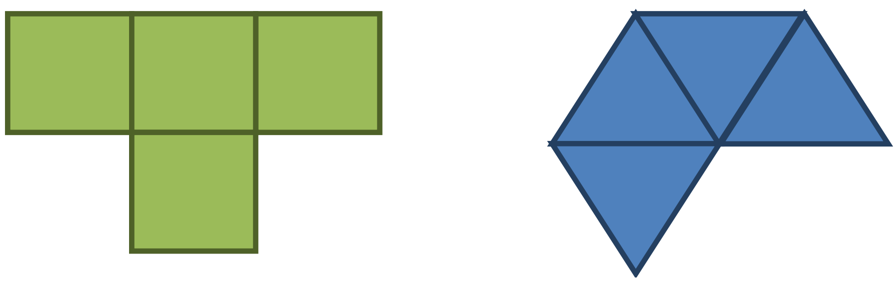
Vid förändringar jämförs vad som sker i förändringen, till exempel hur mycket mer är det eller hur mycket mindre är det efter en förändring. Jämförelser kallas *absoluta* när de fokuserar på skillnaden och de är då additiva till sin natur. Exemplen ovan visar absoluta jämförelser. Jämförelser kan också vara *relativa* och då fokuseras till exempel hur många gånger större eller mindre, eller mer avancerat hur många procent mer eller mindre, något har blivit. Sådana jämförelser är multiplikativa till sin natur.

> *Nora har 10 kronor. Efter en vecka har hon dubbelt så mycket. Hur mycket har hon då?*

Förändringar kan också vara mer komplexa. Om man t ex vill följa hur många passagerare som finns på en buss, förändras detta antal vid varje hållplats. På en hållplats finns det ett antal nya passagerare som stiger på, och ett antal passagerare som går av. Genom att först addera antalet nya passagerare, och därefter subtrahera antalet avstigande kan man beräkna hur många som fortsätter med bussen efter varje hållplats. Men antalet passagerare kan också beräknas genom att först jämföra antalet påstigande med antalet avstigande och därefter addera respektive subtrahera över- eller underskottet.

Exempel inom geometri

Ett sätt att lära känna de grundläggande egenskaperna hos geometriska objekt, är att undersöka vilka förändringar som sker när kvadrater eller olika former av trianglar sätts samman till nya figurer. Genom att till exempel kombinera fyra lika stora kvadrater kan man bilda olika figurer, kombinerar man däremot fyra liksidiga trianglar kan andra figurer bildas (se Figur 1). Jämförelser mellan figurernas antal hörn, area och omkrets kan göras.



Figur 1. Exempel på olika sammansatta figurer.

Exempel på olika samband – proportionalitet

Hittills har vi framförallt diskuterat förändringar och att dessa kan leda till additiva och multiplikativa jämförelser. Dessa jämförelser kan också användas för att studera samband. Samband kan vara proportionella, men alla samband är inte proportionella

Ett ofta förekommande multiplikativt samband är det vi kallar proportionalitet. Exempel på ett sådant samband är dubbelt så mycket, tre gånger så mycket osv. Även olika former av förstoring och förminskning uttryckt med hjälp av skala (till exempel 1:2, 1:10 och 5:1), såsom kartor eller ritningar, är exempel på proportionella samband. Ett annat exempel på ett proportionellt samband är hur mycket en kund får betala jämfört med hur många varor av samma slag kunden köper. Ett mer allmänt sätt att uttrycka ett proportionellt samband på, är genom att ange hur många procent en andel eller en förändring är. I årskurs 1-3 är det rimligt att prata om hälften som 50 % av helhet, och 25 % som hälften av hälften av en helhet. Till resonemang om dubbelt och hälften kan hör också olika sätt att hitta mittpunkten på ett snöre, dela upp en figur i två lika stora delar, eller olika sätt att göra en figurs area dubbelt så stor. Genom att jämföra ett helt snöre med ett halvt eller ett ”halvt halvt” kan det multiplikativa sambandet åskådliggöras.

Att beskriva samband

När olika samband och förändringar diskuteras kan en utgångspunkt vara olika konkreta situationer. För att mer systematiskt beskriva samband kan olika uttrycksformer användas. Exempel på sådana är tabeller eller diagram, till exempel stapeldiagram eller stam-blad-diagram.
I lite mer avancerade diagram används tallinjer som koordinataxlar. Tallinjer är viktiga för att utveckla en förståelse för olika tals relationer till varandra. Även tidslinjer är viktiga för att få hjälp att förstå olika tidsbegrepp. Det finns emellertid en viktig och fundamental skillnad mellan en tallinje och vissa tidslinjer. När man förstorar en tallinje till exempel runt talet 5, så förblir talet 5 en punkt även på den förstorade linjen. Men ifall man förstorar till exempel en tidslinje över ett år runt den 6 juni tillräckligt mycket, så representeras denna dag inte längre av en punkt utan av en sträcka. Detsamma gäller för olika årtal; de är inte punkter utan namn på olika år och representeras därmed av sträckor. Däremot fungerar en linje över ett dygn eller delar av ett dygn som vanliga tidslinjer. Just för tidmätning finns det särskilda redskap, där sambanden framträder tydligt. Ett exempel är urtavlan eller den analoga klockan. Ett annat är en kalender där varje månad framställs med hjälp av ett rutmönster över de ingående dagarna och veckorna. Samma skillnad mellan punkt respektive sträcka finns till exempel när man representerar koordinater med B7 och motsvarande i spelet Sänka skepp. Dessa koordinater står för en ruta och inte en punkt, som i ett vanligt koordinatsystem.

Ett annat sätt att introducera samband är en så kallad funktionsmaskin. Den består av att man matar in ett värde i en låda, därefter ”svarar” lådan genom att mata ut ett nytt värde. Uppgiften blir att lista ut vilken regel lådan fungerar efter (Kilhamn, 2004). Om vi stoppar

in talet 2 och får ut talet 4 kan vi inte bestämt veta vilket samband som råder, det kan vara både additiv (+2) eller multiplikativt (·2). Det behövs fler inmatningar för att kunna avgöra lådans samband (regel). Om inmatningen av talet 5 resulterar i talet 10 vet vi att sambandet för lådan är 2·det inmatade talet (2·x), det vill säga multiplikativt. Hade vi däremot fått talet 7 skulle sambandet vara additivt (2+x).
Samband och förändring är ett rikt matematiskt område. Den texten kan ses som en första orientering inom detta område. I kommande texter kommer innehållet ytterligare att fördjupas.

Referenser

Kilhamn, C. (2004). Funktionslådor. *Nämnaren, 1*, 19-24.

Skolverket (2011). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2014). *Bedömning för lärande i matematik – för årskurs 1-9*. Stockholm: Skolverket.