Skolverket

Samband och förändring – en översikt med exempel på uppgifter

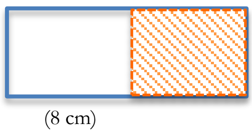
Örjan Hansson, Högskolan Kristianstad

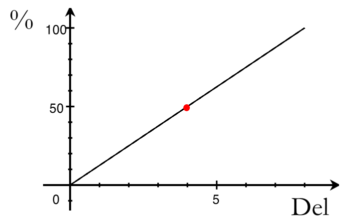
Problem om samband och förändring spänner över stora delar av skolmatematiken och kan studeras i många olika sammanhang, som geometri, algebra, och statistik. Elever arbetar till exempel med samband och förändring i anslutning till geometri då de undersöker hur area och omkrets förändras för en kvadrat när sidans längd varierar. Andra exempel är då elever undersöker mönsterbildning i algebra och ställer upp formler i anslutning till det, eller då de med olika typer av diagram redovisar samband mellan olika storheter i statistik. Problemställningarna har det gemensamt att de i allmänhet innehåller en mer eller mindre tydligt angiven beroenderelation som undersöks och som kan illustreras med en rad olika uttrycksformer, som numeriskt, grafiskt och algebraiskt. Även om samband och förändring är ett kunskapsområde som inte uttryckligen har angivits i tidigare kursplaner så har vi normalt arbetat med problem som faller inom detta område. Att man nu lyfter fram kunskapsområdet i kursplanen är en del av en internationell trend där studiet av förändring har identifieras som ett centralt område i matematik. Nedan följer en kortfattad översikt av samband och förändring ur ett årskurs 1-9 perspektiv.

Översikt

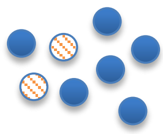
Om vi följer kunskapsområdet samband och förändring genom grundskolan så kan vi konstatera att elever möter samband och förändring tidigt, redan i anslutning till innehåll som del av helhet och del av antal eller samband som hälften och dubbelt. Enkla proportionella samband är ett centralt innehåll under årskurs 1-3 där de dominerande uttrycksformerna är språklig framställning, siffror, text och figurer. Problemställningar inom samband och förändring kan skildras i många uttrycksformer som successivt utökas till att omfatta tabeller, diagram, grafer och algebraiska uttryck vilket ger nya förutsättningar att studera samband mellan olika storheter som vikt och pris, avstånd och tid, ordningstal och mönster, antal och kostnad, längd och area, höjd och volym etc. Fokus flyttas efter hand från att genomföra beräkningar till att studera relationer mellan storheter.

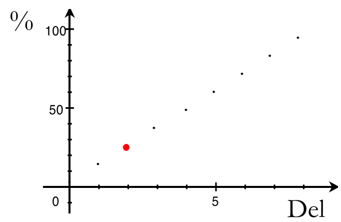
Koordinatsystem möjliggör en visualisering av samband och ger nya möjligheter att formulera och tolka problemställningar inom samband och förändring. Med grafer kan vi på ett överskådligt sätt synliggöra förändring och förändringstakt och får nya möjligheter att avgöra när ett samband ger största eller minsta värde, när det växer eller avtar etc. Innehåll som del av helhet, del av antal och proportionella samband kan speciellt illustreras med grafer, se figur 1 och 2. Under årskurs 4-6 är koordinatsystem och grafer liksom proportionalitet och procent ett centralt innehåll inom samband och förändring. Det är väsentligt att elever uppmärksammar betydelsen av koordinataxlarnas gradering vid en grafisk framställning av förändring. Det är också viktigt att elever utvecklar ett modelltänkande kring proportionalitet. Har eleven god förståelse av proportionalitet kan det modelltänkandet överföras till beräkningar, som procent och skala vid förminskningar och förstoringar. Eleverna arbetar här ofta med beräkningssamband mellan två eller flera storheter där sambanden kan tydliggöras med tabeller, diagram, mönster, grafer och uttryck med obekanta tal.





Figur 1.



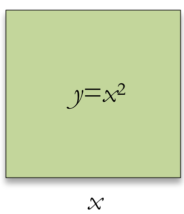


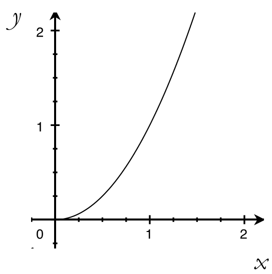
Figur 2.

Figur 1 illustrerar att 4 cm utgör hälften, 50 %, av den totala längden. Figur 2 illustrerar att 2 prickar utgör en fjärdedel, 25%, av de totalt 8 prickarna.

Under årskurs 7-9 introduceras variabelbegreppet och i samband med det blir kopplingen mellan algebraisk och grafisk uttrycksform särskilt betydelsefull. Vi kan här studera vardagliga samband med konstant förändringstakt, som kostnaden för ett internetabonnemang med en installationsavgift och månatlig avgift. I samband med räta linjens ekvation $y=kx+m$ introduceras en ny användning av ekvationsbegreppet som ställer krav på en vidare förståelse av ekvationer. Från att ha arbetat med ekvationer i en variabel så arbetar eleverna med ekvationer i två variabler som har ett oändligt antal lösningar.

Variabelbegreppet innebär även att vi kan uppfatta samband mellan storheter som funktioner. När vi har studerat samband mellan två storheter i tidigare årskurser så är det vanligtvis funktionssamband som vi arbetat med; så är fallet då vi till exempel studerar arean y av en kvadrat som en funktion av dess sida x, se figur 3.





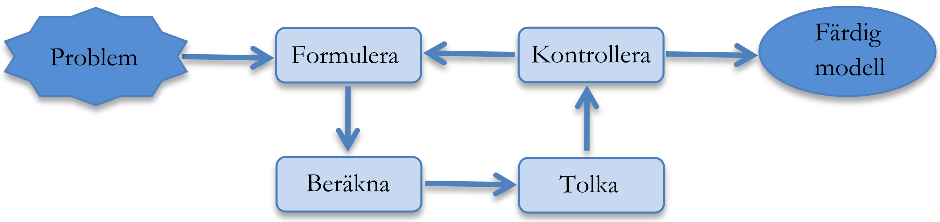
Figur 3.

Funktioner är inte knutna till någon särskild uttrycksform men anges ofta grafiskt och algebraiskt. Under årskurs 7-9 är funktioner, räta linjens ekvation och procent ett centralt innehåll inom samband och förändring. I samband med procent ger förändringsfaktorer ett kraftfullt sätt att resonera om förändring och upprepad procentuell förändring.

Funktionsbegreppet är ett centralt begrepp i matematik som är anpassat till att hantera problemställningar om samband och förändring. Funktioner beskriver inte bara ett samband mellan två storheter utan representerar en abstrakt matematisk idé som innebär att en funktion kan uppfattas som ett föremål med olika egenskaper. Denna syn på funktioner är betydelsefull i vidare studier och kräver en längre tids erfarenhet av funktionsbegreppet varför det introduceras redan i grundskolan.

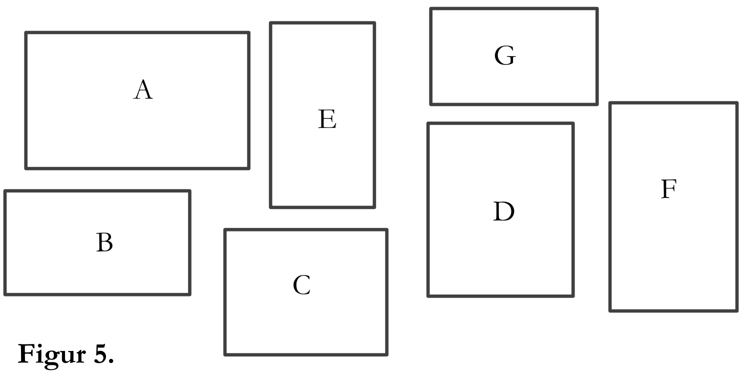
Öppna uppgifter och modelltänkande

Öppna uppgifter som rymmer modelltänkande är ett naturligt inslag inom samband och förändring. Istället för att arbeta med beräkningar i avgränsade sammanhang med tillgång till facit, innebär det ett utforskande arbetssätt där man prövar sin modell och diskuterar och succesivt justera modellen, se figur 4. Detta arbetssätt leder till ett mer produktivt sätt att tänka i matematik (Lesh & Zawojewski, 2007).



Figur 4.

Modelltänkande kan tillämpas i olika vardagliga situationer som vid köp av ett köksbord. Säg att vi vill välja det bord där bordsskivan är mest lik en kvadrat till sin form, jfr figur 5.



Figur 5.

En modell kan i detta fallet bestå i att beräkna differensen mellan rektangelns långsida och kortsida (i figur 6 är differensen 7), eller att beräkna hur många procent större rektangelns area är än arean av den största kvadrat som ryms in rektangeln (i figur 6 är rektangeln 175% större än kvadraten). I båda fallen får vi värdet noll då rektangeln är en kvadrat.

$11 \cdot 4 / 4 \cdot 4 = 2{,}75$
Värde: 175

$11 – 4 = 7$
Värde: 7

Figur 6.

Uppgiften ger eleverna möjlighet att utforma egna modeller med olika matematiskt innehåll. Det är lämpligt att dela ut ett papper med rektanglar av olika form som eleverna utgår från då de jämför sina modeller och diskutera dess för- och nackdelar. Uppgiften innebär att eleverna formulerar ett mått för hur ”nära” en rektangel är en kvadrat till sin form och hur detta förändras då rektangelns form ändras. Vi får en arbetsprocess där elever formulera en modell, genomför beräkningar för modellen, tolkar, kontrollera och diskuterar sina resultat, som kan innebära en omformulering av modellen, jämför figur 4. En utförligare genomgång av uppgiften ges i texten *Matematiska modeller inom samband och förändring* som återfinns i fördjupningen.

Exempel på uppgifter

För att ni som lärare ska få en bild av vad området samband och förändring kan innebära ges här exempel på uppgifter med tillhörande lösningar och kommentarer. I texten *Öppna uppgifter – exempelsamling åk 4-6* hittar ni öppna uppgifter som är lämpliga att använda i årskurs 4-6.

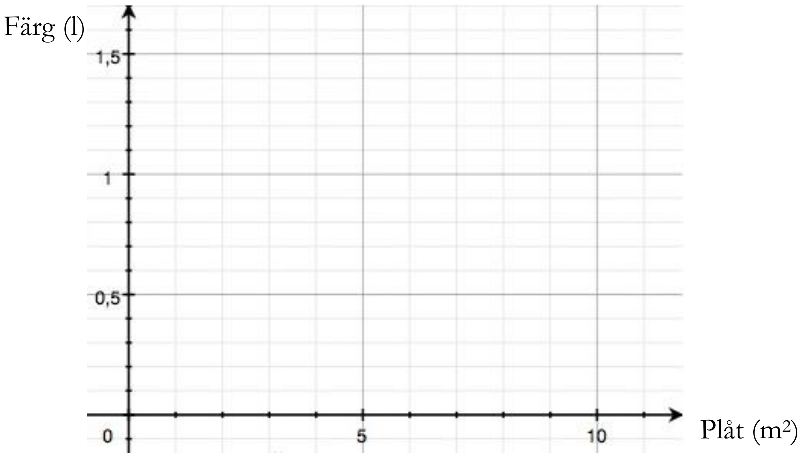
Plåtbitar

Jasmine och Anton målar metallplåtar. De vet att 1 liter färg räcker till cirka 7,5 m² plåt.

a) Fyll i tabellen och ange hur mycket färg som behövs för att måla plåtar av olika storlek.

Plåt (m²)	1,5	3,2	4,1	8,0	10,5
Färg (l)					

b) Rita ut punkter för tabellvärdena i koordinatsystemet.



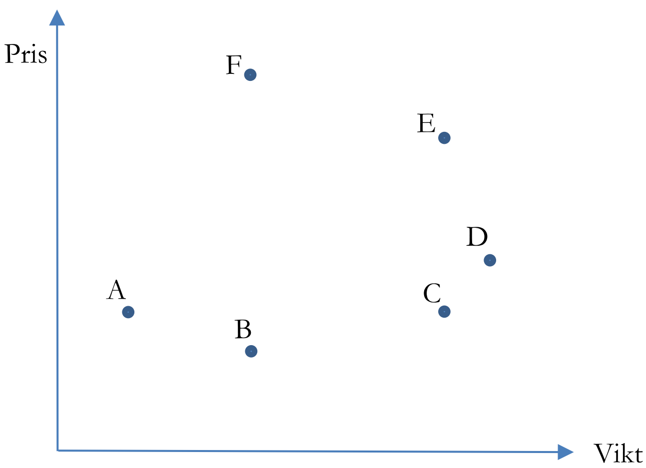
c) Kan du förklara varför punkterna ligger på en rät linje? Rita ut linjen.

d) Vad händer om 1 liter färg bara räcker till cirka 4,5 m² plåt? Rita ut linjen.

Kommentarer: Vi har ett proportionellt samband mellan färgåtgång och area vilket innebär att tabellvärdena ligger på en rät linje som skär origo. Diagrammet kan ligga till grund för en diskussion om vad som är utmärkande för en direkt proportionalitet och tydliggöra att förhållandet mellan färgåtgång och area är konstant.

Chokladkakor

En butik säljer flera sorters chokladkakor, se diagrammet nedan.



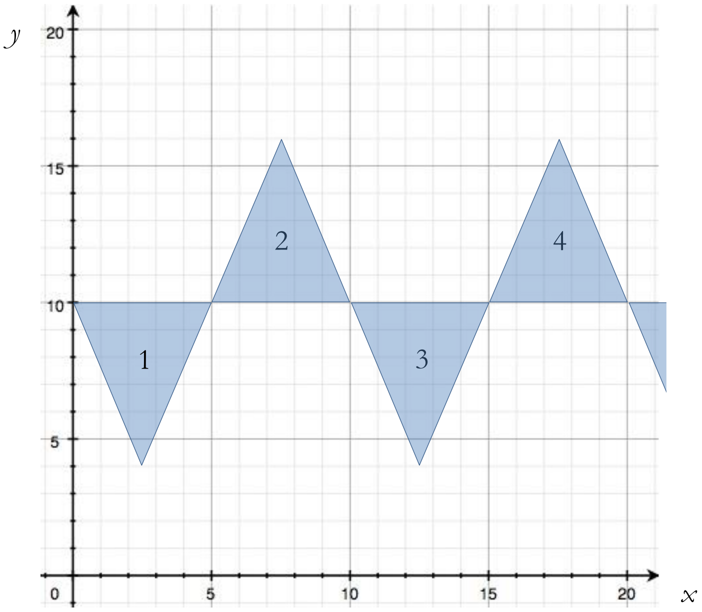
Vi vet att chokladkaka E kostar 32 kr och väger 200 gram.
a) Vilken chokladkaka väger mest?
b) Vilken chokladkaka är billigast?
c) Vilka chokladkakor väger lika mycket?
d) Vilka chokladkakor kostar lika mycket?

e) Vilken av chokladkakorna F och C ger mest för pengarna?
f) Vilka chokladkakor ger lika mycket för pengarna?
g) Kan man lösa uppgifterna a-f utan att känna till att vad chokladkaka E väger och kostar?

Kommentarer: De inledande frågorna a-e är kopplade till förståelse av diagrammet. (e) Förhållandet mellan pris och vikt är lägre för C än för F vilket innebär att C ger mer för pengarna. (f) Två chokladkakor ger lika mycket för pengarna om förhållandet mellan pris och vikt är lika – vi får ett proportionellt samband. A och F är de enda chokladkakorna som ger lika mycket för pengarna. (g) Informationen om chokladkaka E innebär att koordinatsystemets axlar kan graderas men uppgifterna kan lösas med ett ograderat koordinatsystem. För deluppgift f räcker att konstatera att A och F ligger på en rät linje som skär origo.

Mönster

Ebba ritar ett mönster som består av trianglar.



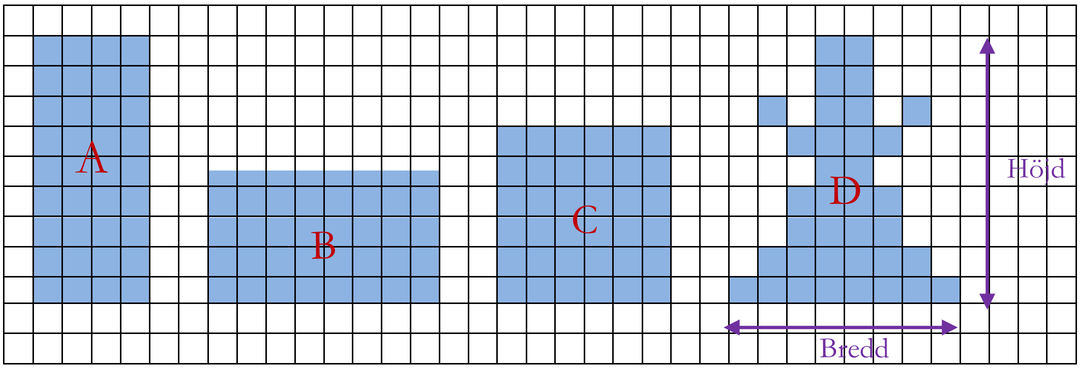
a) Vilka koordinater har hörnen i triangel 2?
b) Vilka koordinater har hörnen i triangel 8?
c) Vilka koordinater har hörnen i triangel n, där n är ett obekant jämnt tal?

Kommentarer: Ett sätt att lösa uppgiften är att utgå från triangel 2 och förflytta den till andra delar av mönstret. (a) Hörnen i triangel 2 har koordinaterna (5, 10), (7,5, 16) och (10, 10). (b) Om triangel 2 förflyttas ett steg åt höger i mönstret, till triangel 4, så går vi sträckan 10. Om triangel 2 förflyttas till triangel 8 så går vi (8-2)/2 = 3 steg i mönstret och därmed sträckan $10 \cdot 3 = 30$ som ger koordinaterna (35, 10), (37,5, 16) och (40, 10). (c) Om triangel 2 förflyttas till triangel n så går vi (n-2)/2 steg i mönstret och därmed sträckan 10(n-2)/2 =

5(n-2). Koordinaterna för triangel n blir (5+5(n-2), 10), (7,5+5(n-2), 16) och (10+5(n-2), 10) som kan förenklas till (5n-5, 10), (5n+2,5, 16) och (5n+10, 10).

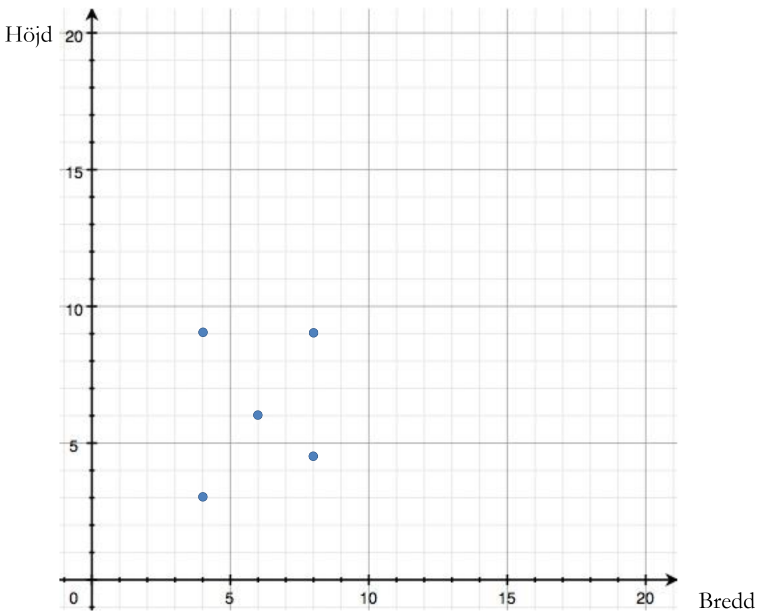
Figurer med lika area

Här är fyra figurer som vardera har arean 36 a.e.



a) Fem punkter är inritade i koordinatsystemet nedan. I koordinatsystemet så motsvarar y-axeln figurens höjd och x-axeln figurens bredd. Ange vilka punkter som motsvarar figurerna A, B, C och D.

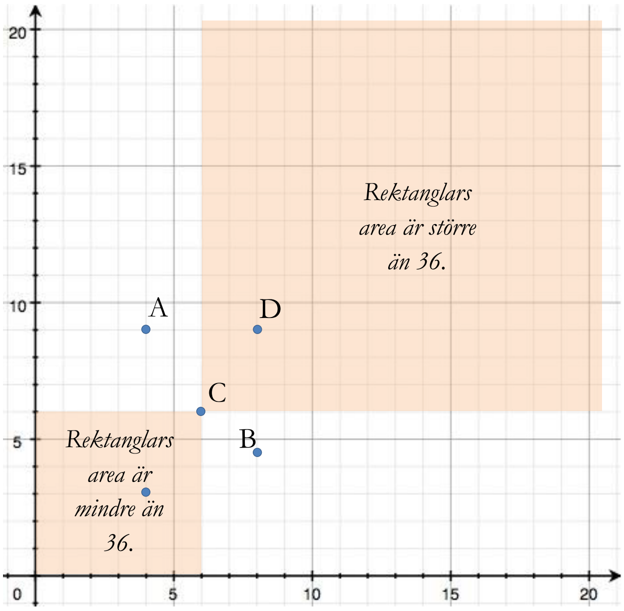
b) Går det att rita en figur som har arean 36 för den punkt som blir över?



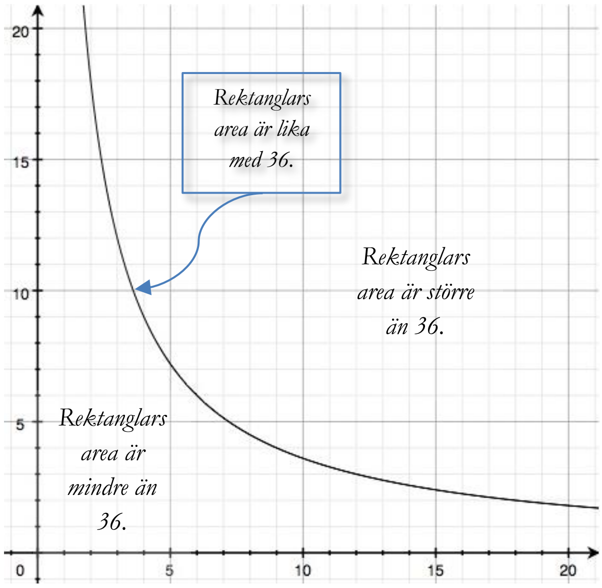
c) Rita ut fler punkter som ger rektanglar med arean 36 (andra än A, B och C). Rita grafen som punkterna tillhör.

d) Vilket område av koordinatsystemet ger rektanglar med mindre area än 36? Vilket område av koordinatsystemet ger rektanglar med större area än 36?

Kommentarer: Uppgiften behandlar sambandet mellan höjd och bredd för figurer med lika area. Rektanglar är figurer som ger maximal area vilket innebär att den återstående punkten (4, 3) högst ger arean 12. Deluppgifterna b-d är kopplade till en diskussion om vilka punkter som representerar rektanglar med arean 36. Till exempel, om vi utgår från punkt (6, 6) och ritar ut en horisontell linje och en vertikal linje så framgår det vilka punkter som ger rektanglar som inte har arean 36, se figur nedan.



Vi får en omvänd proportionalitet mellan höjd och bredd för rektanglar med lika area. Rektanglarna varierar till sin form från en kvadrat till en smal och utsträckt rektangel. I anslutning till uppgiften kan man även diskutera hur andra figurer med lika area ”trycks ihop” och ”dras ut” då höjd och bredd förändras.


Rektanglars area är lika med 36.
Rektanglars area är större än 36.
Rektanglars area är mindre än 36.
20
15
10
5
0
5
10
15
20

Kardemummakakor

Joachim har fått ett recept på kardemummakaka av sin mormor. Men han har spillt kaksmet på receptet så en del siffror inte går att läsa. Tabellen visar hur de olika ingredienserna ändras då antalet kakbitar ändras. Fyll i de siffror som saknas.

Antal kakbitar				25
Vetemjöl (dl)	6			15
Bakpulver (tsk)		3,75	5	
Strösocker (dl)		3		5
Kardemumma (msk)				2,5
Smör (g)	100	150	200	250
Mjöl (dl)	2,5	3,75		6,25

Kommentarer: Matrecept följer proportionella samband. Till exempel, för att fylla i värden för kardemumma så kan vi utgå från raden smör. Den sista kolumnen ger 2,5/250=0,01 vilket innebär att förhållandet mellan kardemumma och smör är 0,01. Vi får därmed k/100=0,01 som ger 1 i första kolumnen, k/150=0,01 som ger 1,5 i andra kolumnen, samt k/200=0,01 som ger 2 i tredje kolumnen. Övriga värden bestäms på motsvarande sätt. Den ifyllda tabellen blir:

Antal kakbitar	10	15	20	25
Vetemjöl (dl)	6	9	12	15
Bakpulver (tsk)	2,5	3,75	5	6,25
Strösocker (dl)	2	3	4	5
Kardemumma (msk)	1	1,5	2	2,5
Smör (g)	100	150	200	250
Mjöl (dl)	2,5	3,75	5	6,25

Referenser

Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.). *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing.