HÖGSKOLAN KRISTIANSTAD

Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse II

Per-Eskil Persson & Tomas Wennström
Klippans Gymnasieskola 2000

Innehållsförteckning

Förord

Detta är den andra i en serie rapporter, som presenterar resultat från en longitudinell undersökning av de NV-elever, som höstterminen 1998 påbörjade sina gymnasiestudier vid Klippans Gymnasieskola. Avsikten med studien är främst att undersöka hur elevernas algebraiska förmåga och förståelse utvecklas under gymnasietiden.

Denna rapport kommer huvudsakligen att beskriva dels läget i början av NV2, dels vad som hänt med gruppen i stort under första året på gymnasiet. Vi kommer att följa upp den här rapporten med en, där vi mer i detalj kommer att granska ett antal elever och hur de utvecklats. Vi planerar också att genomföra vissa undersökningar i slutet av NV2 och NV3.

Dessa studier har möjliggjorts dels genom ett generöst bidrag från Gudrun Malmers Stiftelse, dels genom anslag från Skolverket. De ingår som en del i ett projekt i matematikdidaktik, som i samarbete med Högskolan Kristianstad pågår i Klippans kommun. Vi vill också framföra ett stort tack till universitetslektor Barbro Grevholm, Högskolan Kristianstad för mycket hjälp, uppmuntran och konstruktiv kritik under arbetets gång.

Bakgrund

Höstterminen 1998 påbörjades en longitudinell undersökning av de elever, som då började i NV1 vid Klippans Gymnasieskola. Avsikten var att följa dessa elever under gymnasietiden och studera hur deras algebraiska förmåga och förståelse utvecklas. För att göra detta används bl.a. test, enkäter, intervjuer och observationer av eleverna. För att ytterligare belysa problematiken har dessa data kompletterats bl.a. med intervjuer och samtal med lärare både från grundskolan och gymnasieskolan. I undersökningen deltar totalt 4 NV-klasser med ca. 100 elever. I två av dessa har författarna egen undervisning, vilket möjliggör kontinuerliga observationer. I dessa båda klasser har också mycket av elevernas skriftliga material som prov och test sparats.

I en tidigare rapport (Persson & Wennström, 1999) har resultat från de test, enkäter och intervjuer, som genomfördes ht 1998 i NV1 presenterats. Denna rapport innehåller också en någorlunda fyllig diskussion av bakgrunden till projektet, tidsplanen för detsamma och använda metoder.

Den här rapporten kommer att fokusera intresset på läget i början av höstterminen 1999 i NV2. Hur är kunskapsläget då och vilken är inställningen till matematik och algebra i synnerhet? Vilka förändringar har inträffat under första året i gymnasieskolan ?

Området för vår studie är den traditionella skolalgebran dvs. bl.a. ekvationer av första och andra graden, enkla ekvationssystem, förenklingar av polynom och rationella uttryck, enkla funktioner och deras grafer (jfr. Kieran, 1992, sid. 391). Som vi framhöll i vår förra rapport, anser vi att hela den algebraiska cykeln med faserna *översättning, omskrivning* och *tolkning* är lika viktig (se Bergsten et al, 1997, sid. 15-16). Med ny teknik som t.ex. symbolhanterande räknare kommer kanske översättning och tolkning att bli viktigare än omskrivning. Men som vi också framhöll i den rapporten, är trots ny teknik ett visst mått av manuella färdigheter nödvändiga. Bl.a. vet vi inte hur färdighetsträning och förståelse hänger ihop. Trots mycket forskning från olika infallsvinklar om undervisning och inlärning av algebra måste man nog tyvärr konstatera, att ingen har funnit någon kungsväg till algebran och att området upplevs som problematiskt i många länder (se t.ex. Bergsten et al, 1997, Wagner & Kieran, 1989 och Bednarz et al, 1996). En del framsteg har gjorts och kunskap för praktikern finns, men behovet av ytterligare forskning är stort.

Problem och frågeställningar

En fråga vi ställde i vår första rapport var om det finns en minsta nivå på förkunskaperna från grundskolan för att en elev skall lyckas med sina matematikstudier i gymnasieskolan. Med lyckas menar vi i detta sammanhang att minst uppnå ett klart godkänt resultat på de olika matematikkurserna, som finns på NV-programmet. Ofta får lärare i åk 9 frågan från elever om de tror att förmågan och kunnandet i matematik räcker till för att klara NV-programmet. Frågan är troligtvis felställd och har inget enkelt svar. Frågan borde kanske i stället vara om man kan klara NV-programmet med relativt dåliga förkunskaper och vad skolan och eleven kan göra i det sammanhanget för att underlätta för eleven. Hur man lyckas är ett komplicerat samspel av både kognitiva och affektiva faktorer. Kan vi i vår studie urskilja några faktorer, som är av speciell betydelse för att elever med dåliga förkunskaper skall lyckas?

En annan fråga av intresse är vilka förkunskaper som är speciellt viktiga för algebrainlärningen. Det är kanske inte så att eleverna när de kommer från grundskolan behöver vara speciellt duktiga på att skriva om algebraiska uttryck. Det är kanske andra kunskaper och färdigheter som är av större vikt som t.ex. god talförståelse - även av negativa och rationella tal, prioriteringsregler och parentesers betydelse, förståelse för vad bokstäver står för och förmåga att översätta till ett algebraiskt uttryck samt likhetstecknets betydelse. I perspektivet matematik från förskola till högskola kan vi kanske hitta former för att från tidig ålder bättre grundlägga det kunnandet som är av betydelse för algebrainlärningen. Vid Matematikbiennalen i Göteborg presenterades en intressant utställning om algebra från 6 års ålder (Forsbäck et al, 2000). Vilken betydelse har den röda tråden i matematikundervisningen ? I sin bok om dyslexi ställer Gudrun Malmer frågan, när vi skall börja med algebra.

> *Själva ordet algebra (bokstavsräkning) leder tanken till något som ligger långt ifrån nybörjarmatematiken.* ***Men vi skulle kanske rent av starta med prealgebra i stället för med aritmetiken ?*** (Malmer & Adler, 1996, sid. 73)

Den väsentliga frågan är naturligtvis hur vi - utgående från varje elevs individuella förutsättningar - kan ge en god algebraisk kompetens. Att en sådan behövs om man skall lyckas med sina matematikstudier på NV-programmet och senare på högskolan är nog de flesta överens om.

Betydelsen av s.k. affektiva faktorer skall inte underskattas. Motivation och självförtroende är oerhört viktiga för all mänsklig verksamhet och inte minst gäller detta matematik. Ofta har man nog negligerat detta i matematikundervisningen. De flesta lärare vet, att oftast tycker den elev som lyckas om ett ämne. Så ställs t.ex. sällan frågan ”Vad skall man med det till ?” om det går bra – även om frågan ofta är berättigad. Hur kan vi då anordna elevernas studier i algebra och matematik så att deras självförtroende stärks ?

Andra frågeställningar av intresse är om det finns några speciella hinder som försvårar respektive underlättar inlärningen av algebra. Är t.ex. algebrainlärning något som sker språngvis så att när man övervunnit ett visst hinder gör man väsentliga framsteg ? För vissa elever verkar så vara fallet. Andra frågor av vikt är hur mycket repetition som behövs för att bibehålla uppnådda färdigheter och hur säker man behöver vara i att räkna utan hjälpmedel .

Resultat

I början av ht 1999 genomförde vi i NV2 - ungefär på samma sätt som i NV1 (se Persson & Wennström, 1999) - ett test och en enkät. Vi har kompletterat detta material med elevintervjuer, men denna gång bandade vi inte dessa utan noterade direkt efter intervjun det väsentliga. Vid intervjuerna i NV1 fann vi att bandspelaren i viss grad var lite störande för en del elever.

Ett viktigt inslag – för elever med dåliga förkunskaper – var den stödverksamhet, som bedrevs i NV1. I förra rapporten redogjordes för en del av de problem och svårigheter som speciellt dessa elever hade med algebran. Problem och svårigheter som förvisso mer eller mindre också förekom hos andra elever. I den här rapporten kommer stödverksamheten att diskuteras mer i detalj eftersom vi anser att den är en väsentlig faktor för att få fler elever att lyckas.

För att få överskådlighet i ett ganska stort material och inte drunkna i detaljer försöker vi lyfta fram det vi funnit karakteristiskt och mest intressant. Detta innebär naturligtvis en viss subjektivitet, men är nödvändigt för att få ett användbart material.

Test vid början av NV2

Algebratestet i NV1 bestod bara av uppgifter med svar. I testet för NV2 förekommer både uppgifter med endast svar (uppg. 1-5) och uppgifter där eleverna skall presentera en lösning (uppg. 6-8). På så sätt kan vi få en bättre uppfattning om vad det är för fel eleverna gör. Är det frågan om triviala räknefel eller är det fel som tyder på dålig begreppsförståelse ? Även på uppgifter med enbart svar kan man ofta se vad eleven gjort för fel.

I testet för NV2 har en del uppgifter, som förekom i testet för NV1, tagits med. På så sätt får vi bättre möjligheter att studera förändringar. Uppgifterna, som återkommer, är av standardkaraktär och uppgiftstypen har förekommit många gånger under algebrastudierna i NV1. Därför tror vi inte det på något sätt påverkar resultatet, att eleven stött på samma uppgift ett år tidigare. Dessutom är det frågan om uppgifter, som gick mindre bra i NV1. Vi kan också kontrollera rimligheten av våra slutsatser från testresultaten med alla de löpande observationer vi gjort under året i NV1. Hela testet återfinns i bil.1.

Totalt 96 elever testades på 21 olika uppgifter omfattande bl.a. ekvationslösning, uppställning av algebraiska uttryck och algebraiska förenklingar. Testet genomfördes även denna gång utan räknare. Endast helt rätta svar och lösningar har gett poäng (1 poäng per uppgift). Speciellt på de uppgifter där lösning skulle lämnas – i en del fall ganska omfattande uppgifter - kan detta bli lite missvisande, eftersom små lapsusfel behandlas på samma sätt som allvarliga principfel. Men i samband med diskussionen av enskilda uppgifter kommer vi att ta upp detta.

Bortfallet från NV1 var 9 elever (i NV1 deltog 105 elever i testet) och det är både elever med goda och mindre goda kunskaper, som slutat. Därför anser vi att bortfallet mellan NV1 och NV2 endast har marginell betydelse och vid en diskussion av förändringar kan man bortse från detta.

Av tabell 1 framgår totalresultatet. Ganska många elever (42%) har goda eller mycket goda algebrakunskaper. Mer än 75% har sådana kunskaper som gör att de bör kunna klara av sina fortsatta matematikstudier på ett acceptabelt sätt. Några få elever har så pass svaga kunskaper att det är tveksamt om de kan klara av de högre matematikkurserna (Ma C,D,E) tillfredsställande. När vi till sommaren 2000 har tillgång till elevernas betyg på Ma C och D kan vi med lite större säkerhet säga hur det gick. Testet kompletterat med prov och andra observationer visar att merparten av eleverna har gjort goda framsteg under sitt första gymnasieår. En intressant fråga här är om det finns speciella faktorer som bidrar till att eleverna gör framsteg. Det finns exempel på att elever med dåliga förkunskaper har gjort väsentliga framsteg.

Tabell 1 Totalpoäng på testet i NV2

Poäng	<2	2 – 5	6 – 9	10 – 13	14 – 17	18 - 21	
Andel	0%	1%	5%	17%	35%	42%	100%

Vi kommer att gå igenom testet uppgift för uppgift och kommentera resultaten. Då det förekommer två procenttal anger det första resultatet i NV1 och det andra i NV2.

1. Lös ekvationerna nedan

   a) $4x - 15 = 75$ (71%,86%)

   b) $\frac{x}{5} + 6 = 14$ (81%,85%)

   c) $2^x - 1 = 7$ (51%,74%)

   d) $x^2 - 6x + 8 = 0$ (79%)

De flesta eleverna kan lösa grundläggande ekvationer. Av uppgift 1ab) framgår att förmågan var relativt god redan i NV1. De fel som förekommer är troligtvis av lapsuskaraktär t.ex.
$4x - 15 = 75$ ger $x = 15$. Eleven har minskat med 15 i stället för att lägga till 15 och fått
$4x = 60$. De flesta elever klarar enklare andragradsekvationer

2. Låda A väger a kg, låda B väger 50 kg mer än låda A och låda C väger 3 gånger så mycket som låda A. Hur mycket väger

   a) låda B (87%,94%)
   b) låda C (87%,92%)
   c) låda A + låda B (förenkla svaret) (60%,81%)
   d) alla tre lådorna (förenkla svaret) (59%,78%)

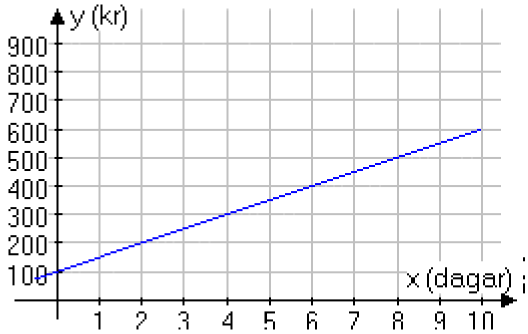
Elevgruppen har gjort framsteg vad gäller att ställa upp ett algebraiskt uttryck. Men enstaka elever svarar t.ex. a^3 på 1b. De kan således inte skilja på 3a och a^3, vilket klart indikerar bristande förståelse av grundläggande begrepp.

3. | * | *** | ***** | ***** ** |
   |---|---|---|---|
   | fig 1 | fig 2 | fig 3 | fig 4 |

   a) Hur många stjärnor har fig 10 ? (86%,96%)
   b) Hur många stjärnor har fig n ? (34%,65%)

Även här har framsteg gjorts, men att endast 65% klarar 1b är lite otillfredsställande.

4. Diagrammet visar sambandet mellan kostnaden och antalet dagar då man hyr en cykel. Skriv en formel för linjen. (51%,59%)



På den här uppgiften har eleverna i stort sett inte gjort några framsteg. I NV1 arbetade vi mycket med räta linjens ekvation och då kunde de flesta elever klara en uppgift av denna typ. När testet gavs, var det ca. 3 månader sedan vi arbetat med räta linjen. Vad resultatet definitivt visar är att man glömmer och för att behålla kunskaper och färdigheter behövs ständig repetition.

5. Förenkla uttrycken

a) $y + 3(4 + 3y) + 8$	(60%,92%)
b) $10x + 3(4 - 3x) + 8$	(54%,88%)
c) $10x - 3(4 - 3x) – 8$	(42%,77%)
d) $(2x - 5)(3x + 4)$	(19%,79%)

På den här uppgiften har störst framsteg gjorts. Många elever var osäkra på den här typen av förenklingar, då de började i NV1, men i NV2 kan de flesta klara av dessa förenklingar. Resultatet visar att mycket av förenklingsalgebran troligtvis kan klaras av i NV1 och att man i grundskolan kanske bör ägna mer kraft åt andra aspekter av algebran som t.ex. översättning och tolkning av bokstavsuttryck.

Visserligen är det få elever, som gjort fel på 5ab, men de felaktiga svar som förekommer visar på stora brister i begreppsförståelsen. På 5a t.ex. förekommer svar som $9y^2 + 20$, $4y+20$ och $3y^2+13y+20$. De visserligen få elever som gör sådana här fel har en dålig – alltför dålig – algebraisk kompetens.

På 5c kan man märka en viss osäkerhet med negativa tal. Det stämmer väl med de observationer vi gjort under året. En del elever får svårigheter med förenklingsalgebran för att de har bristande förståelse för räkning med negativa tal. Några exempel på felaktiga svar är $x – 20$, $19x – 4$ och $19x + 4$.

Binommultiplikationen i 5d har i de flesta fall gått bra. De flesta felen här är slarv t.ex. $5x^2$ i stället för $6x^2$, men det förekommer även allvarligare fel som t.ex. svaret $6x^2 – 20$, vilket tyder på brister i både förståelse och förmåga.

6. Lös ekvationerna nedan

a) $(3x-8) +(x+3) = 10$	(83%)
b) $3(20+y) - 2(5+2y) = 40$	(84%)
c) $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2 = 96$	(68%)

På uppgift 6 – 8 skall lösning ges, varför det är lättare att identifiera feltyp. De flesta har klarat 6ab. De flesta felen är av typ slarv, men det förekommer också allvarligare fel som att man förväxlar addition och multiplikation och får i 6a ekvationen $3x^2+ 9x – 8x –24=10$.

I 6c förekommer en mängd olika fel. Ett av de vanligaste är att man gör olika fel på tecknen då man utvecklar den andra parentesen. T.ex. får man

$$4x^2 + 12x + 9 – 4x^2 + 12x + 9 = 96$$

som väl troligtvis är slarv. En fråga man kan ställa i det här sammanhanget är hur säkra eleverna skall vara vid handräkning. Vill man ha stor säkerhet fordras mer färdighetsträning, vilket tar tid från annat. Behöver man ha stor säkerhet i sitt algebraiska räknande med tanke på de hjälpmedel som finns i dag ? Våra matematiska institutioner anser ju att så är fallet, eftersom man oftast inte tillåter hjälpmedel, men hur är situationen om 10 år och hur är det för alla de elever, som inte skall ägna sig åt matematiska studier vid högskolan. Så vilken säkerhet i algebra utan hjälpmedel skall vi eftersträva ?

7. Förenkla uttrycken
   a)) (3x-4)(5-3x) + (2x+3)(-4x+3) (66%)
   b) 4(3x-4)(5-3x) - 3(2x+3)(-4x+3) (35%)

Merparten av felen här är triviala räknefel på multiplikation och addition/subtraktion. Den övning vi hinner ge eleverna räcker inte till för att ge dem riktig säkerhet speciellt på uppgifter av typ 7b. De flesta elever förstår hur man skall hantera sådana här uttryck, men har inte tillräcklig räkneträning för att alltid genomföra räkningarna helt korrekt. Behöver de större säkerhet eller skall vi använda den tid som skulle behövas för detta till annat ?

8. Givet ett tal. Öka talet med 5. Multiplicera därefter summan med 3. Subtraherar du denna produkt från talet 100 blir resultatet 12. Vilket var det givna talet ? Ställ upp och lös en ekvation. (46%)

Det vanligaste felet är att man vänder på ekvationen och får 3(x+5) – 100 = 12 i stället för det korrekta 100 – 3(x+5) = 12. Felet visar att mycket träning behövs i att översätta från en text till ett algebraiskt uttryck. Kanske behöver vi öva detta mer i stället för att öka säkerheten i att för hand skriva om olika uttryck ? Symbolhanterande räknare och datorer klarar av omskrivningarna, men dessa hjälpmedel klarar inte av att från en problemtext översätta till algebraiska uttryck.

Enkäter

Precis som i NV1 fick eleverna i början av höstterminen besvara en enkät (se bil.2). Totalt har 87 elever (33 flickor och 54 pojkar) av 96 svarat så bortfallet är litet. Enkäten bör väl spegla undersökningsgruppen. Syftet med enkäten var dels att få en uppfattning om inställningen till matematik och algebra (fråga 1 och 2), dels att se hur eleverna klarade av att uttrycka sig matematiskt (fråga 3 och 4). I en del fall är det svårt att få eleverna att skriva speciellt mycket eller överhuvudtaget något. Flickorna är oftast mer villiga att uttrycka sig skriftligt än pojkarna och ger gärna lite fylligare svar.

Enkäterna har kompletterats med intervjuer eller samtal med ett antal elever. Den här gången bandade vi inte intervjuerna, eftersom vi funnit att för en del elever var detta hämmande. I stället noterade vi det väsentliga direkt efter intervjun. (se under Övriga observationer)

För att göra materialet från enkäter och intervjuer användbart har det varit nödvändigt att göra ett urval, som sammanfattas och komprimeras. Syftet är att få fram vad som är representativt för ett antal elever, men samtidigt vill vi belysa intressanta svar som avviker från gängse ståndpunkter. Huvudmålet i denna rapport är att beskriva gruppen som helhet och inte enstaka individer. Enkäten kommer att gås igenom fråga för fråga. Materialet kommer att beskrivas kvalitativt. Någon detaljerad statistisk bearbetning av materialet är varken rimlig eller intressant. I rätt stor utsträckning låter vi elevsvaren tala för sig själv.

1. ***Vad tycker du om matematik nu? Förklara t.ex. i termer som roligt - tråkigt, lätt - svårt osv. Förklara gärna varför du tycker som du gör.***

Frågan ställdes främst för att se om attityden till matematik ändrats under det första gymnasieåret. Naturligtvis kan det ibland vara svårt att klassificera om ett svar är positivt, neutralt eller negativt. Det kan, som framgår av exemplen nedan, vara en blandning. Få elever är enbart negativa (< 5 st). De allra flesta är positiva (ca 70%). En hel del framhåller att matematik blivit roligare. Av elevsvaren kan man klart utläsa en positiv trend. Ofta anger man att det är roligt, när man lyckas och förstår.

Matten är ganska rolig. Den har blivit roligare än den var i högstadiet. (flicka)

Jag tycker att matten har blivit lättare och då blivit roligare. Jag har haft stor nytta av extra matten. Detta gör att jag hänger med lättare. (pojke)

För det mesta är det roligt och intressant men ibland är det svårt och då är det inte lika kul. (flicka)

Matte är kul när man fattar. När man ser att ens egna uträkningar leder till rätt svar, det är roligt. Men när man inte förstår, blir det bara krångligt och känns tråkigt. Därför är det så viktigt att man har tillgång till hjälp och stöd! Att ha en lärare som är engagerad är viktigt – speciellt i matematik. (flicka)

Mycket roligare än innan för nu förstår man bättre. (pojke)

Jag tycker matten har blivit roligare nu när man lärt sig lite mer. (pojke)

Ganska roligt men för tillfället alldeles för stressigt. Annars kul. (pojke)

Det har blivit roligare nu. Jag fattar mer logiken nu. (flicka)

Matematiken har blivit svårare men också roligare. (pojke)

Matematik kan man förstå till skillnad från andra ämnen och matte är nog det roligaste ämnet jag har. (flicka)

Det är inte ett av de tråkigare ämnena, som jag tyckte på högstadiet. Nu är det nästan lite roligt och intressant att se om man klarar talen man räknar. (pojke)

Jag tycker att matematiken är nödvändig. Inte tråkig utan nödvändig. (pojke)

Matte kan vara både roligt och tråkigt. Ibland måste man använda huvudet så mycket att man får huvudvärk och ibland går det mycket bättre. (flicka)

Det är ganska svårt vilket då gör det tråkigt. Men sen å andra sidan, när man löser ett svårt tal får man en lyckokänsla. (pojke)

Matematiken är inte rolig, men inte heller tråkig. Den är lite vardaglig. Något man måste göra, men kanske inte alltid tycker är så roligt. Jag tycker den har blivit svårare. (flicka)

Jag tycker matten är lätt men ändå lite tråkig. Det är stressen som gör att det blir lite tråkigt. Stressen beror på att jag helst inte vill ha nån matteläxa. (pojke)

Jag tycker matematiken är svår och när man inte hänger med så blir det lätt tråkigt. Men ibland är det roligt och det är när allt fungerar som det skall – lätt är när allting flyter och blir rätt. (pojke)

2. *Vad tycker du om algebra och hur tycker du att du klarar algebran?*

De flesta är också positiva till algebran (ca 70%). En del tycker det är roligt för det är ”klurigt”. I motsats till enkäten i NV1 är det ingen som ifrågasätter behovet av algebra. I grundskolan kan det nog – vilket några elever uttryckt vid intervjuer – vara svårt att motivera behovet av algebra. I gymnasiet ser man ganska snart att man har nytta av algebraiska kunskaper både i matematik och tillämpningsämnena. Av enkäterna framgår också att det är viktigt att man känner att man gör framsteg. Då ökar självförtroendet. I matematikundervisningen har det nog funnits en dålig traditionen, att man för lite har bekymrat sig om betydelsen av affektiva faktorer som motivation och självförtroende.

Algebra är roligt när man fattar och kan. Jag tycker att jag klarar algebran mycket bättre nu än jag gjorde i början av gymnasiet. (pojke)

Algebra är den roligaste delen. Jag lyckas nog klura ut den rätt bra. (flicka)

Jag har haft lätt för det hittills, sen om det är roligt är ju en annan sak. Intressant att kunna !!! (flicka)

Användbar, jag klarar den bättre nu men ändå svår. Algebran klarnar mer och mer. Den börjar till och med bli rolig. (pojke)

Jag tycker om algebra. Jag tycker att det är lättare nu. (flicka)

Algebra är ganska roligt, därför att det är klurigt. (flicka)

Jag tycker algebra är rätt enkelt, känns logiskt och är lätt att lära sig. Mer av algebra tycker jag. Man har ju verkligen nytta av det. (pojke)

Roligt, intressant och framför allt imponerande. Själv klarar jag den hyfsat bra. (pojke)

Jag tycker att algebra generellt är ganska lätt och jag klarar av den ganska bra.(flicka)

Det är roligt att räkna algebra. Jag klarar det väl hyfsat. Fast vissa saker är lite krångliga. (flicka)

Jag tycker det är kul. Jag tycker jag klarar det ganska bra. På högstadiet fattade jag knappt något och förstod inte vad det skulle vara bra för att kunna. Det gör jag nu. Vi har det i de flesta karaktärsämnen fysik, kemi, teknologi. Det är ett måste att man kan det någorlunda. Efter sommaren kände man sig lite ringrostig men efter ett tag kommer man in i det igen. (flicka)

Algebra är inte så kul men det går bättre detta året om man jämför med förra. (flicka)

Nu har jag fattat det här med algebra. Det hade jag inte gjort innan, men nu förstår jag det. Jag har väl kommit över en sån där ”tröskel”. Nu klarar jag väl det mesta. Felen är oftast slarvfel. Fortfarande får jag dock tänka lite på det här med minus och plus. Det känns ännu inte helt naturligt. (flicka)

Algebran är ok. Jag tyckte jag klarade av den hyfsat men ändå lite besviken på resultat och betyg. (flicka)

Det går väl ganska bra men det är tråkigt. (pojke)

Jag tycker att ju svårare och krångligare algebran blir, desto tråkigare är det. Men än så länge tycker jag att jag klarar det bra. (flicka)

Jag tycker algebran är svår och skulle gärna vilja att den blev förklarad ofta. Jag tycker jag klarar den så där men försöker klara mig så bra som möjligt. (pojke)

3. Förklara för en kamrat hur man löser ekvationssystemet nedan. Skriv så du tror kamraten kan förstå.

$$\begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$$

I det här sammanhanget gör vi bara en grov klassifikation av de olika lösningarna. Man kan inte påstå att eleverna som grupp är speciellt bra på att uttrycka sig matematiskt och inte hellre att de blivit speciellt mycket bättre på detta under första året på gymnasiet. Kanske det är viktigare att träna denna förmåga mer än att få ökad säkerhet på att skriva om algebraiska uttryck ? Klassifikationen nedan är naturligtvis både subjektiv och grov, men bör ändå ge en bild av läget. Om en viss elevlösning skall klassas som bra eller hyfsad kan naturligtvis diskuteras. Procenttalen är ungefärliga.

- Substitutionsmetoden bra förklaringar (32%)
- Substitutionsmetoden hyfsad förklaring med vissa brister (31%)
- Additionsmetoden bra förklaringar (11%)
- Additionsmetoden hyfsad förklaring med vissa brister (7%)
- Prövning - bra förklaringar (1%)
- Lösning med brister eller dålig förklaring eller ingen förklaring (17%)

4. Vi skriver y = 2x + 5. Vad menar man med det ? Hur hänger t.ex. x och y i hop ? Förklara helst på mer än ett sätt.

Den här uppgiften kan diskuteras en hel del. En liknande förekom i NV1 (y = x + 5). Många elever begriper nog – precis som de gjorde i NV1 – vad uttrycket betyder. Men de har svårt att uttrycka sig på ett bra sätt. I en hyfsad förklaring kan en helt felaktig term dyka upp. En del ”orkar” inte skriva speciellt mycket ibland ingenting. Ett problem med enkäter och intervjuer är att få eleverna motiverade så att de anstränger sig, när de skall svara. De flesta av våra elever har nog gjort det – men inte alla. Ibland beror detta säkert på en allmän osäkerhet och olust för att skiva svenska.

Som på tidigare frågor kan indelningen i hyfsade beskrivningar och mindre bra diskuteras även på denna fråga. Helt perfekta svar, där man tar upp flera aspekter på frågan, är få. Vi börjar med några exempel på relativt hyfsade svar även om brister förekommer (ca 30% av svaren). Även om de inte är fullständiga beskriver de korrekt någon aspekt på $y = 2x + 5$. Bristerna beror troligtvis mest på oförmåga att uttrycka sig matematiskt i skrift.

y är en funktion av x. Man får en linje i ett ekvationssystem om man ritar ut varje punkt. välj ett tal för x och du får ett tal för y. för varje tal man väljer som x så finns det ett y-värde. (flicka)

y är en funktion av x. k=2 och m=5. k-värdet är hur mycket linjen stiger eller sjunker (Dh). m-värdet är där linjen skär y-axeln. (visar i fig.) (flicka)

y=2x + 5 är ekvationen för en rät linje. Om man ökar x med 1 så ökar y med 2. (pojke)

y är lika mycket som 2 st x + 5. (pojke)

Något av y är lika med 2 st x + 5. (pojke)

Man kan säga att y=2x+5 är detsamma som y=2×(nånting) + 5. Man kan använda det här till att räkna ut något okänt. (pojke)

Jag kan inte förklara – det bara är så y är helt enkelt 2 gånger x plus 5. (pojke)

Detta är en linjefunktion. y är en funktion. y är dubbelt så stor som x +5. Du gör en värdetabell. Av detta kan du så få fram ett diagram. Här har vi en linje med riktningskoefficienten 2. Där linjen skär y-axeln m=5. (värdetabell och diagram finns med) (flicka)

y är dubbelt så stort som x +5. Linjeekvation: 2 är riktningskoefficient och 5 är var på y-axeln linjen skärs. (pojke)

Att varje y motsvarar dubbelt så många x plus 5. Det är även en linjeekvation på en linje med en riktningskoefficient 2. Linjen skär y-axeln vid 5. Man säger att y är proportionellt mot x. (pojke)

Det är en ekvation för en rät linje. (flicka)

y har ett större värde än x. y är minst 5 större än x. Man kan sätta in formeln i ett diagram, efter formeln y = kx + m, där k=2 o m=5, sen kan man se ökningen. (flicka)

y=2x+5 betyder att du måste multiplicera ett tal med 2 och resultatet adderas med 5 för att summan ska bli y. x och y hänger ihop så att ökar du x ökar y med, sänker du x sänker y med. Ökar du x med 1 steg, ökar y med 2 steg. (flicka)

Man menar att ett värde (y) är detsamma som ett annat värde (x) som man dubblar och adderar med 5. Alltså dubblar man talet x och lägger till 5 så har man också fått fram ett y-värde. (pojke)

Merparten av svaren på frågan är mer eller mindre bristfälliga – ibland felaktiga och/eller obegripliga. En del elever svarar inte alls. Vi nöjer oss med några exempel:

Det kan vara en ekvation för en linje som man räknar ut. (flicka) *y är dubbelt så stort som x. (pojke)*

Detta är troligtvis en formel för en rät linje. För varje ökning av y (1 steg) så ökar x med 2 steg. +5 står för att linjen skär y-axeln på +5. (pojke)

y är ett tal som man får ut om man lägger ihop 2x + 5. x är också ett okänt tal. y och x hör ihop för om det är olika y och x så svaren olika. (pojke)

Den här ekvationen kan ingå i ett icke proportionellt diagram, där y är det värde du får fram. y har i detta sammanhang samma värde som 2x + 5, där x kan ändras och y får ett likgiltigt svar. x och y hänger inte ihop utan är bara tecken i stället för tal. Det man vet är att de inte är lika eftersom du multiplicerar x med 2. (flicka)

Det betyder att x är proportionell mot y. Om y ändras ändras x proportionellt . Satsen står för en rät linje med k=2 och m=5. (pojke)

Man menar att y alltid är mer än dubbelt så mycket som x. Ökar x i värde så ökar y med det dubbla. Dessutom är värdeskillnaden alltid minst 5 mellan de båda variablerna. (pojke)

Stödundervisningen i NV1

På de flesta gymnasieskolor genomför man ett eller flera förkunskapstest i matematik, när eleverna börjar i åk 1. Med ledning av dessa sätter man sedan i regel in olika typer av stödåtgärder för de elever som uppvisar svaga resultat. En metod, som tillämpas på flera håll, är att nivågruppera eleverna på ett program. Speciellt mycket har nivågruppering använts på NV och SP, eftersom man oftast har så många elever där att det blir möjligt. Man delar då oftast in eleverna i olika "starka" grupper utifrån testerna, och dessa grupper undervisas var för sig. Metoden ger lärarna möjlighet att bedriva undervisning med elever, som har relativt homogena kunskaper och färdigheter. I den "svagaste" gruppen kan man repetera mer av grundskolans kurs och man kanske får större timtilldelning för exempelvis Ma A-kursen. I den "starkaste" gruppen kan man snabbt passera förbi repetitionsavsnitten för att komma till de nya och svårare momenten. Det hela är mycket rationellt, men det finns invändningar mot metoden.

Naturligtvis har man som förutsättning för gruppindelningen att enskilda elever ska kunna byta mellan nivåerna. Tyvärr visar erfarenheten att rörelsen nästan alltid är nedåt. De elever, som med resultatet av sitt test fått en viss "duktighets"-etikett, tenderar att uppfylla denna förväntning de fått på sig. De uppfattar det som så, att det är omöjligt att väsentligt höja sin prestationsförmåga över den grupp de befinner sig i. Särskilt kan det drabba dem, som hamnat i den "svagaste" gruppen. I värsta fall kan dessa ge upp försöken att klara matematikkurserna redan från början. Är det egentligen så säkert att de resultat, som kommit på förkunskapstesterna, speglar elevens verkliga potential vad det gäller att tillgodogöra sig matematikfärdigheter? Kanske har eleven varit sent utvecklad i matematisk förmåga? Eleven var kanske placerad i en "långsammare" grupp på grundskolan, så att vissa luckor i förkunskaperna uppstått? Kanske matematikundervisningen hittills passat eleven dåligt, så att hon/han trott sig vara svagt matematikbegåvad?

Vi har på vår gymnasieskola provat en annan modell för stöd på NV-programmet. När förkunskapstesterna gjorts i början av åk 1, tar varje lärare ut ett antal elever, som de anser vara i behov av stöd. Elever från två klasser bildar en grupp, som då blir på c:a 10 elever var. Med totalt fyra klasser blir det då två stödgrupper. Dessa elever får sedan en extra timmes matematikundervisning per vecka under resten av åk 1. Dessa timmar ligger dessutom schemalagda på morgonen, vilket är viktigt ur flera synpunkter. Resurserna för stödundervisningen tas inte från den ordinarie timtilldelningen för Ma AB-kurserna, utan ges extra. Gruppsammansättningen är inte statisk, utan revideras av lärarna två gånger per termin beroende av resultat på tester och prov. Den undervisande läraren kan, men måste inte, vara någon av klassernas ordinarie matematiklärare. För den grupp NV-elever, som vår undersökning gäller, har en av författarna (Per-Eskil) fungerat som stödlärare.

Stödundervisningen bedrivs parallellt med den ordinarie matematikundervisningen och har som ändamål att

- fylla ut luckor och avhjälpa brister i förkunskaperna från grundskolan
- lösa upp knutar för de enskilda eleverna när de kört fast i den ordinarie undervisningen och ta dem över "trösklar"
- ge eleverna tid att diskutera matematik enskilt och i grupp samt att få träna att använda sig av korrekta matematiska termer och benämningar
- skapa utrymme för annorlunda infallsvinklar till matematikbegreppen och för att pröva nya typer av övningar
- framför allt stärka elevernas självförtroende vad gäller deras matematiska förmåga.

Vi har naturligtvis följt de elever som tillhört stödgrupperna extra noga i våra undersökningar. Det är speciellt hos dessa, som vi finner många av de grundläggande svårigheterna att klara algebran. Vi vill också se hur vårt kunskapstest och vårt stödsystem fungerar för denna del av matematiken. Den är ju ganska avgörande för hur eleverna klarar av studierna på NV-programmet överhuvudtaget. Ett misslyckande i matematikstudierna är en viktig orsak till avhopp från NV. Hur ser det då ut nu efter 3 terminer på programmet?

Avhoppen från programmet är få (9 av 105 och då är det några duktiga elever som flyttat), trots att vi tog in ovanligt många elever på NV-programmet det året. I vissa fall hade de låga intagningspoäng, vilket också avspeglade sig i testresultaten. Trots det har många av de elever, som visade stora brister i förkunskaperna och som vi kanske var rädda inte skulle klara matematiken, kunnat lyfta sin förmåga kraftigt. Deras förtroende till sig själva att kunna lösa matematiska problem har blivit mycket starkare. Av våra nu 96 elever har alla klarat minst Godkänt på Ma A och alla utom en minst Godkänt på Ma B. På C-kursen, som nyligen lästs klar, tyder de preliminära resultaten på att alla blir godkända. Detta får vi dock återkomma till i nästa rapport.

Hur har då eleverna själva upplevt stödgrupperna? Vi tillfrågade dem bl.a. detta i de intervjuer som gjordes under höstterminen i åk 2. Svaren visar tydligt, att eleverna sett stödet som klart positivt och att de ansett det som nödvändigt för att klara matematiken. En elev svarade så här (vilket är ett representativt svar):

> *utan stödtimmarna hade jag aldrig klarat matten. Innan fattade jag ingenting av det där med x, men nu börjar det klarna.*

En farhåga annars med att ta ut en stödgrupp är, att eleverna upplever det som negativt, som en stämpel på dem, att de är "dummare" än andra etc. Visst var det någon, som var lite undrande i början, och uttryckte det:

att jag skulle behöva hamna i stödgrupp, när jag hade VG på högstadiet…

Men sedan visade det sig att de fick goda resultat på tester och provräkningar i den ordinarie undervisningen. De som gick i stödgruppen hade plötsligt gått förbi andra elever i sina prestationer. Nu var de inte sämst längre, och självförtroendet steg. Efter ett tag kom faktiskt elever, som inte var uttagna till stödet och frågade om de inte också fick vara med på timmarna. Här kom naturligtvis gruppernas flexibilitet in i bilden, men det var viktigt att inte grupperna blev för stora om målen skulle uppnås. På höstterminen i åk 2 har NV-eleverna fått möjlighet att välja en stödkurs i karaktärsämnena Ma-Fy-Ke som individuellt val. De flesta av dem, som var uttagna till stödet i åk 1, valde även detta stöd i åk 2 när de själva fick bestämma. Stödet upplevdes som värdefullt och behövligt!

Matematiklärarna är genomgående positiva till vår metod med stödundervisning och de resultat den uppvisat. Vi har också fått ett positivt gensvar från skolledningen, som ju måste tillskapa resurserna för extratimmarna. Dessa kostar visserligen, men i gengäld sparas pengar in, som annars skulle gå till andra typer av stödåtgärder. Det finns i nuläget ingenting, som talar för att vi skulle övergå till exempelvis nivågruppering på NV, utan vi kommer att använda stödmetodiken framöver.

Observationer av algebrasvårigheter

I föregående rapport (Persson & Wennström 1999) beskrevs några av de observationer, som gjorts av algebrasvårigheter både hos elever i stödgrupperna och i den ordinarie matematikundervisningen. En grov klassificering gjordes enligt följande:

- *Eleven har brister i sina aritmetiska färdigheter:*
  Prioritetsregler för räknesätten, parentesers betydelse och ”osynliga” parenteser, bråktal och bråkräkning, negativa tal och minustecknets betydelse, potenser etc.

- *Den matematiska abstraktionsnivån är inte tillräckligt hög:*
  Uppfattning av bokstavssymboler, variabelbegreppet, samband mellan variabler, översättning till bokstavsuttryck, tolkning av resultaten av algebraiska operationer etc.

- *Det logiska tänkandet har inte utvecklats och tränats:*
  Likhetstecknets betydelse, olikheter, sanna och falska utsagor, logisk korrekthet i lösningar etc.

De olika huvudtyperna går naturligtvis ofta in i varandra, och det är inte alltid så lätt att avgränsa ett enskilt problem till att falla inom precis en av dem. Det är dock möjligt att lyfta fram en viss svårighetstyp och skapa särskilda övningar, som är avsedda att träna eleverna just på den punkten. Läroböckerna som används i undervisningen försöker göra detta och lyckas ofta ganska bra, i alla fall för flertalet elever. Men hur är det för de andra, som inte lyckas förstå framställningen i läroböckerna? Och är det inte så, att läroböckerna tar för snabba genvägar i många fall och ”busar” förbi avsnitt, som åtminstone vissa elever skulle behöva öva mycket mer på?

Carolyn Kieran anser att man kan dela upp övningarna inom skolalgebran i två huvudtyper, som hon kallar *procedurmässiga* (procedural) och *strukturella* (structural) (se Kieran 1992).

Med *procedurmässiga* övningar menar hon aritmetiska operationer, som man använder på tal för att få tal som resultat. Till exempel, om man tar det algebraiska uttrycket $5a + 3b$,och ersätter a och b med 2 resp. 4, så får man resultatet 22. Ett annat exempel är, om man löser ekvationen $5x - 3 = 12$ genom att sätta in olika värden på x till det rätta hittas. I båda exemplen utförs inga algebraiska operationer på uttrycken, utan man utför rena beräkningar med ett tal som svar.

I *strukturella* övningar görs olika algebraiska operationer på uttryck eller ekvationer, och svaret blir ofta ett algebraiskt uttryck. Till exempel, om man tar uttrycket $5a + 3b - 4a$, kan detta förenklas till $a + 3b$ eller delas med a och ge $1 + \frac{3b}{a}$. En ekvation som $5x - 5 = 3x + 7$ kan lösas genom att man subtraherar 3x från båda sidor så att man får $2x - 5 = 7$. Här utförs i båda fallen operationer på uttrycken, som inte är talberäkningar och som ger nya uttryck som resultat.

Kieran menar, att eleverna utvecklas från ett procedurmässigt tänkande till ett strukturellt i vart och ett av de algebraiska momenten. Varje elev behöver ett visst mått procedurmässiga övningar innan hon/han kan förstå den strukturella aspekten. Men det är i högsta grad individuellt betingat hur mycket man behöver av de första innan man kan gå över till de andra. Även sedan man lärt sig det strukturella sättet att arbeta, är första impulsen ofta att man söker en procedurmässig väg att lösa ett problem, särskilt om det är något nytt och ovant man kommer till. Läroböcker innehåller ofta några få, och för många elever alldeles för få, övningar i början av avsnitten med lite insättning i uttryck eller lite prövning av ekvationer. Sedan går man raskt över till att arbeta helt strukturellt och de första övningarna glöms bort. Man ger rentav eleverna intrycket att det inte är så viktigt med procedurövningarna och att de nog egentligen kunde överhoppas. Men de flesta behöver verkligen träna på dem och vissa behöver mycket sådan träning innan de kan gå vidare. Det är just sådana elever vi har i vår stödundervisning.

En av de huvudtyper av algebrasvårigheter vi definierat är att eleverna inte har tillräckliga *aritmetiska färdigheter*, och det ställer omedelbart till problem, när t.ex. värdet av uttryck ska beräknas (procedurmässig övning). Om man exempelvis inte förstår bråktal och bråkräkning, har man nog svårt att bestämma värdet av uttrycket $\frac{3x}{7}$ då x är 14. Och arbetar man strukturellt, blir det svårt att förenkla uttrycket $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4}$ eller lösa ekvationen $\frac{2x}{5} = 6$.
Här måste man naturligtvis lägga in träning i ren bråkräkning, som eleven kanske aldrig fått riktigt klar bild av på grundskolan.

Ett speciellt och mycket viktigt problem är minustecknets betydelse. Samma tecken används som bekant i två olika betydelser, dels som en markör för negativa tal och dels för räknesättet subtraktion. Eleverna har sällan eller aldrig tidigare diskuterat dubbelbetydelsen. Vad står tecknen för i uttryck som $-2x - 3z$ eller $5a - (-2b)$? På elevernas grafräknare finns det två olika tangenter för de båda betydelserna. Övningar med värdeberäkningar med hjälp av räknarna, där uttrycken ska slås in direkt som de står med bokstäverna lämpligt substituerade, är här till stor hjälp. I många fall måste eleven också själv förstå att sätta in extra parenteser för att det ska bli rätt prioritetsordning på räknaren. Det är t.ex. vanligt att om man i potensen x^4 ska sätta in $x = -3$ så blir svaret -81.

Det kan vara matnyttigt att diskutera de negativa talen som *motsatta* de positiva (strängt taget handlar det ju om inversa element inom gruppteorin). På samma sätt kan man behandla subtraktion som en *motsatt operation* jämfört med addition och division motsatt mot multiplikation. Eleverna kan härigenom få en övergripande syn på tal och taloperationer, som de inte haft tidigare, och det kan underlätta betydligt när man ska förklara de ibland ganska svårbegripliga sambanden för negativa tal. Det har väl aldrig varit särskilt lätt att förklara varför $-3 \cdot (-5)$ blir $+15$?
Förvånansvärt många elever har svårt att omedelbart tänka sig att två motsatta operationer upphäver varandra om man utför dem i följd. Om man frågar eleverna vad resultatet blir om man multiplicerar talet 27 med 8 och sedan dividerar resultatet med 8, är det många som verkligen försöker utföra de

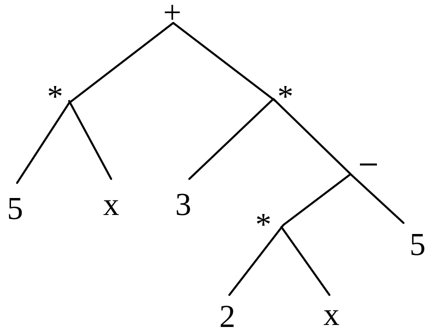
två operationerna (gärna på räknaren!) istället för att lätt konstatera att svaret ju måste bli 27. Detta är ytterligare ett tecken på att man i första hand försöker en beräkningsmässig lösning och bara i andra hand en mer övergripande-operationell. Man kan öva eleverna med huvudräkningsuppgifter, som är konstruerade så, att de lätt klaras om man har en god överblick, men blir mycket svåra om man försöker utföra dem direkt.

Ex.
$$753 - 367 - 453 + 167$$
$$367x + 1234x - 367x$$
$$8 \cdot 6 \cdot 13z \cdot 32 \cdot 17z \cdot 0 \cdot 67z$$
$$(17-3)(14-5)(13-13)(15-4)$$
$$47 \cdot 35x / 47$$

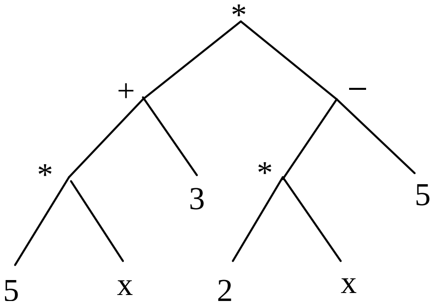
När eleverna ska övergå till ett strukturellt sätt att arbeta, är det flera svåra steg, som måste tas. Dels gäller det själva uppfattningen av bokstavssymbolens betydelse, dels de olika faserna i den algebraiska cykeln (se Bergsten et al, sid. 19 resp. 15). Hur uppfattar eleven uttrycket $7x + 3x$? Vad står x:en för egentligen? Vilken beräkning förväntas man göra med uttrycket? Så länge eleven är kvar i ett procedurmässigt tänkande, blir det helt obegripligt. Hon/han måste steg för steg slussas in i ett allt abstraktare synsätt. Till att börja med måste x stå för något reellt, t.ex. en sten. (Vi har alltså 7 stenar och så lägger vi till 3 stenar. Hur många stenar har vi då?). Kanske man kan övergå till att x är ett slags ”enhet” (7 kg + 3 kg = 10 kg). Men slutligen kommer man till att x står för ett tal (pröva med något!) och till slut att x kan vara vilket tal som helst och svaret blir ett uttryck, $10x$. Här finns en liten fälla. $7x$ kan ju uttydas $7 \cdot x$, vilket eleverna oftast vet, men hur mycket lättare blir egentligen förenklingen om man skriver om den som $7 \cdot x + 3 \cdot x$?

En svårighet som faktiskt de flesta elever har, är att de har svårt att se den *övergripande strukturen* i uttryck och ekvationer. De måste öva sig att inse skillnaden mellan $5x + 3(2x-5)$ och $(5x+3)(2x-5)$. Alltför ofta ser man på prov och test att även det första uttrycket utmynnar i en binommultiplikation. Att se strukturen och handla därefter måste därför tränas speciellt. En sådan övning är att göra upp ett slags träddiagram, som beskriver strukturen med räkneoperationer eller likhetstecken vid förgreningarna och tal eller variabler som löv. Så här representeras de två uttrycken:

$5x + 3(2x-5)$



$(5x+3)(2x-5)$

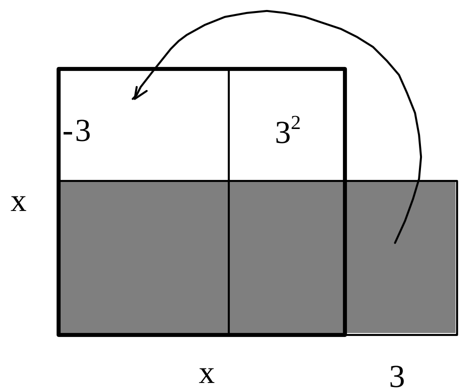


Som synes ser de båda ”träden” helt olika ut, vilket ju avspeglar att de båda uttrycken ger helt skilda resultat vid förenkling. Men poängen är, att eleverna tvingas att i detalj analysera det de håller på med och övas i att se skillnad på olika, men snarlika algebraiska uttryck.

De *algebraiska regler*, som styr hur man multiplicerar in i parenteser, multiplicerar hela polynom eller specialreglerna konjugatregeln och kvadreringsreglerna, är i början mycket svårförståeliga för eleverna. Även sedan de lärts in, görs det mycket fel när de tillämpas. Till exempel är det inte så sällan man förväxlar en kvadreringsregel med konjugatregeln. Uttrycket $(2x-3)^2$ skrivs om som $4x^2-9$ eller möjligen $4x^2+9$. För att stötta eleverna i både deras minne av reglerna och i deras tekniska utförande av dem, kan det vara till hjälp att använda sig av geometriska bilder. Det är ju egentligen ingenting nytt. Under antiken utgick man från geometrin när man skulle presentera olika räkneregler. Al- Khwarizmi använde sig också av geometriska bilder i sin al-Jabr, även om problemen presenteras retoriskt. Våra läroböcker innehåller ibland också sådana bilder, när de ska förklara räknereglerna, vilket är positivt. Ändå finns det anledning att i ännu högre grad låta elevernas minnesbilder av algebraiska regler bygga på en geometrisk framställning. Bilderna motiverar reglerna på ett bra sätt. Så här kan man till exempel visa hur ett binom, som multipliceras med ett trinom, måste ge upphov till sex termer före en eventuell slutlig förenkling:

2a	$2a^2$	6ab	4ac
b	ab	$3b^2$	2bc
	a	3b	2c

Med bildens hjälp får eleverna också ett tankemönster, som de kan använda när de ska utföra denna typ av multiplikation. Det går också att lösa andragradsekvationer med hjälp av kvadratkomplettering, som då blir helt bokstavlig (se Bergsten et al, sid. 75). Besvärliga specialregler kan motiveras med lämpliga bilder. Så här kan en tillämpning av konjugatregeln visas:



Den streckade rektangeln har arean $(x-3)(x+3)$. Samma area får man om man flyttar den fristående högra rektangeln till positionen uppe till vänster. Men då fyller man ju ut kvadraten x^2 sånär som på den lilla kvadraten uppe till höger med arean 3^2. Arean är alltså också lika med x^2-3^2 och konjugatregeln är visad i det här fallet.

Vid *ekvationslösning* stöter eleverna på en rad svårigheter, som oftast har sitt upphov i att de inte fullt förstått likhetstecknets betydelse och att det används i två olika funktioner. När likhetstecknet först dyker upp i skolmatematiken fungerar det nästan enbart som en uppmaning till att utföra en beräkning. Det synsättet förstärks också när läraren frågar: ”Vad *blir* 5 plus 8 ?” och sedan på tavlan skriver $5+8=$ som en symbolisk översättning av frågan till matematiska tecken. Om likhetstecknet bara används i betydelsen ”blir” eller ”beräkna”, är det mycket svårt för eleverna att förstå principen för ekvationer. Ofta använder de ett helt procedurmässigt sätt att angripa de enkla ekvationerna. Om t.ex. ekvationen $3x+7=19$ ska lösas, resonerar en elev så här: ”Först måste jag dra 7 från 19, då får jag 12, sedan ska jag dela med 3 och svaret blir 4 !” Eleven har lärt sig att lösa upp ekvationen genom att tillämpa motsatta räkneoperationer på ett korrekt sätt, och svaret blir ju rätt. Kan då den här eleven ekvationslösning på den här nivån? Nej, inte på det strukturmässiga sättet i alla fall, och det visar sig om eleven måste redovisa hela ekvationslösningen. Hon/han försöker då mer eller mindre framgångsrikt sätt översätta sin tankekedja till algebraiska uttryck. Resultatet blir då ofta logiskt osammanhängande med brott mot likhetstecknet m.m. Ändå har eleven kunnat hanka sig fram genom de inledande avsnitten av ekvationslösning.

När då ekvationernas svårighetsgrad ökar med t.ex. ekvationstypen $ax \pm b = cx \pm d$, fungerar inte elevens beräkningsmetoder längre, och allt blir plötsligt fel. Nu blir det en besvärlig process, som hon/han måste gå igenom med en total omorientering vad gäller likhetstecknet. Betydelsen av *jämförelsetecken* måste lyftas fram med speciella övningar. Förhoppningsvis har eleven fått en del föralgebraisk övning av typen: $7+?=10+3$, som tvingar fram ett jämförande tänkande. Det kan dock i en stödgrupp vara bra med en del ytterligare träning av detta tänkande exempelvis med likheter av typen $5 \cdot 3+2=7 \cdot 3-4$, som sedan ersätts med ekvationen $5 \cdot x+2=7 \cdot x-4$. Lösningen $x=3$ är den enda som balanserar ekvationen, som gör likheten sann. Alla andra x medför ett osant påstående. Det är ju egentligen vad övningarna med ekvationsprövning i läroböckerna går ut på. Många elever behöver betydligt mycket mer övning i detta än vad som ges i böckerna, och man måste gå tillbaka till detta moment även sedan eleverna kommit långt i sina färdigheter att lösa ekvationer strukturellt. Man har en tendens att glömma bort möjligheten att pröva sina lösningar och kanske även använda prövning som en lösningsmetod.

De *grafräknare*, som används på NV-programmet, bjuder på bra möjligheter att träna prövning av ekvationer på ett effektivt sätt. Att grafiskt plocka fram lösningar, som man sedan visar är korrekta, är en färdighet alla elever måste tillägna sig. På de mest använda grafräknarna finns en annan användbar funktion, som inte använder grafisk framställning, nämligen automatiska värdetabeller. Antag, att man ska finna heltalslösningar till ekvationen $x^2+x+2=5x-1$. Det går naturligtvis att göra upp en tabell för hand och beräkna värdet av de båda leden för några x. Men effektivare blir det om man betraktar ekvationsleden som två uttryck i x och lägger in dem som: $Y1=x^2+x+2$ och $Y2=5x-1$. Med *TABLE*-funktionen tas sedan fram en tabell, som förslagsvis kan börja med $x=0$ och stega med heltalssteg 1. I tabellen kan man direkt genom att jämföra de båda kolumnerna för Y1 resp. Y2 upptäcka för vilka x de är lika. Det går att rulla uppåt och nedåt i tabellen hur långt man önskar för att möjligen finna lösningar som inte genast kommit upp eller kanske göra det sannolikt att inga fler lösningar finns. Här är det också viktigt att poängtera att det är värdena på x och *inte* värdena på uttrycken som är lösningar, ett felslut som elever ibland gör.

Slutligen får något nämnas om användningen av algebra i *problemlösning*, som kräver färdighet i att översätta texten till algebraiska uttryck samt att tolka resultaten av de algebraiska operationerna i form av ett svar på problemet. De två momenten har alltid ansetts som svåra, och de kräver mycket och systematisk träning om färdigheten ska bli god hos eleverna. Ett problem, som är tillrättalagt för skolövning, kan låta:

Anette är 6 år äldre än Johan. Om 3 år är summan av deras åldrar 50 år. Hur gammal är var och en av dem nu?

Man gör egentligen en rent semantisk översättning av problemet; ord blir tecken. Men är det så tillrättalagt i verklig problemlösning? För det mesta är verklighetstrogna problem ofta knepiga att bena ut och representera algebraiskt. Kanske vi tränar för lite att använda oss av algebraiska uttryck och även avge svar i form av ett uttryck? I det diagnostiska testet vi använt både i NV1 och NV2 har vi med ett sådant problem (uppgift 2). En väsentlig förbättring visade sig från åk 1 till åk2, men många elever har fortfarande betydande svårigheter med att förstå hur uttrycken ska bildas. Det visar sig ofta när man senare kommer till exempelvis maximeringsproblem i C-kursen och geometriska sträckor ska uttryckas med någon variabel att åtskilliga elever har stora svårigheter med det. Ett annat avsnitt, där översättningar måste göras, är vid tillämpningar av funktionslära. Här är det ofta lättare att hitta verklighetstrogna exempel, som att jämföra kostnadsplaner med olika fasta och rörliga kostnader och liknande. Men att forma de algebraiska uttrycken är oftast den svåra delen av problemet. Läroböckerna vill gärna ”hjälpa till” genom att tillhandahålla uttrycken färdiga, men det ger eleverna en falsk säkerhet, som försvinner så snart problemet formuleras enbart i text.

Övriga observationer

Som nämnts ovan har vi även i NV2 haft en del intervjuer med eleverna. Den här gången använde vi inte bandspelare. Vid intervjuerna i NV1 fann vi att en del elever blev lite hämmade av bandspelaren. Vi ville ha ett avslappat samtal om algebra med eleverna och genomförde sådana med samtliga elever i våra båda klasser. Vi har mest använt dessa samtal som ett komplement till övrigt material. De har kanske mer haft karaktären av ett utvecklingssamtal än en renodlad intervju.

En sak vi tagit upp i dessa samtal är nivågruppering i grundskolan. Många skolor tillämpar i dag en tidig nivågruppering och många förordar det som en bra lösning. Det råder dock både bland lärare och elever delade meningar om nivågruppering är bra eller dålig. Kanske denna fråga inte har ett generellt svar. För en del elever är det bra och för andra dåligt.

Av våra elever har en del varit nivågrupperade sedan åk 7 och andra har arbetat i blandade grupperingar. Många elever med goda förkunskaper har varit nivågrupperade och då placerade i en bättre grupp. Om deras goda resultat beror på nivågrupperingen eller andra faktorer, kan vara svårt att avgöra. Några elever med mindre goda förkunskaper i algebra har varit nivågrupperade men då i en sämre grupp och därför har de nästan inte alls sysslat med algebra på högstadiet. Därför skall man kanske var lite försiktig med en alltför tidig nivågruppering (åk 6/7) ? Man skall kanske vänta med nivågrupperingen till åk 9, då eleverna lite bättre vet vilket program de kommer att välja på gymnasiet. Då kan man t.ex. ha en mer intensiv algebraundervisning för de elever som siktar mot mer teoretiska program.

En annan sak vi har observerat i en del fall – och fått bekräftat vid diskussioner med elever - är betydelsen av kamratstöd och arbete i smågrupper. Det finns elever med dåliga förkunskaper, som har haft mycket stor hjälp och nytta av att de samarbetat med lite duktigare kamrater. Utbytet har säkert varit ömsesidigt. När man förklarar för någon, lär man sig själv – ens begreppsbildning stärks. Vi skulle nog i gymnasieskolan i större utsträckning, än vad vi gör i dag, stimulera eleverna att samarbeta kring mantematik.

Sammanfattning och slutsatser

Enligt vår bedömning hade de flesta eleverna (ca 80%) relativt goda kunskaper i algebra, då de började i NV2. De flesta har gjort betydande framsteg i både algebraisk förmåga och förståelse. Räknesäkerheten vid omformningar av uttryck kunde vara bättre, men frågan är om – med de tekniska hjälpmedel som finns i dag – tid skall läggas på träning av detta. Frågan vilken säkerhet, som skall eftersträvas vid manuell räkning, bör diskuteras. Förmågan till att använda algebra vid problemlösning och att i olika sammanhang ställa upp algebraiska uttryck är kanske en viktigare kunskap i dag ?

Vi anser att vår undersökning ger stöd för uppfattningen att gymnasieskolan kan klara en stor del av förenklingsalgebran. Det är t.ex. inte nödvändigt att kunna konjugat- och kvadreringsregler, när man lämnar grundskolan. För många elever blir nog också kunskapen om dessa regler mekanisk utan djupare förståelse. Viktigare är att eleverna får en god förståelse för variabelbegreppet och lär sig använda bokstäver i olika sammanhang. God talförståelse av bråk, negativa tal, prioriteringsregler och betydelsen av parenteser är också viktigt.

I det här sammanhanget är det nödvändigt att man får i gång en förutsättningslös diskussion från förskola – högskola om vem som skall ta ansvar för vad. Vi måste komma överens om vad som är speciellt viktigt. Vi måste finna den röda tråden i matematikundervisningen och speciellt i det här sammanhanget algebrainlärningen. Läroplanerna ger ingen ordentlig ledning här. De kan sägas beskriva vad som är önskvärt, men vi vet alla – oberoende av om vi undervisar små barn eller studenter - att de flesta elever endast i viss mån når upp till läroplanernas mål. Därför behövs någon form av prioritering. Kanske NCM skulle initiera någon form av seminarier kring detta ?

En fråga vi ställde var vad man skall göra med de svaga eleverna. På de flesta utbildningar i matematik – både i skola och på högskolan – gör man någon form av förkunskapstest av nybörjare. Oftast konstaterar man då, att ett antal elever har väldigt dåliga förkunskaper. Men vad gör man sedan ? Om diagnosen inte leder till någon form av speciella åtgärder, är den nog snarast skadlig. Svaga elever får ett ”kvitto ” på att matematikstudierna sannolikt kommer att gå illa.

Vi har oftast i matematikundervisningen försummat s.k. affektiva faktorer som tilltro till den egna förmågan och motivation. I bland har vi väl snabbt ”dömt ut” elever och föreslagit dem att göra något annat. I vår undersökning har vi klart sett, att man skall vara försiktig med detta. Vi har haft elever, som vi inte trott skulle klara av matematiken. Utgångsläget och första terminen var inte hoppfull. Men till slut lossnade det !! Den viktigaste faktorn här är nog elevens tilltro till sig själv och läraren. Någon form av stöd – som den extra veckotimme matematik vi haft i NV1 – är naturligtvis mycket viktig. Lika viktigt är, att eleven sätts i situationer så att hon/han lyckas. Om eleven känner att hon/han gör framsteg ökar både motivationen och tilliten till den egna förmågan. Därför är det viktigt både i skolan och högskolan att man anpassar de inledande studierna efter elevens förutsättningar !!

En faktor av vikt, som vi berört i den här rapporten, är kamratstödet. Vi har sett fall där det har varit av betydelse för att svaga elever skall lyckas. Vi tror att matematikinlärningen skulle öka i effektivitet om vi fick fler elever att samarbeta mer. Detta skulle inte bara vara bra för svaga elever utan även för duktigare. När man förklarar för någon annan, ökar man sin egen begreppsförståelse (jfr. med konstruktivismen se t.ex. Engström, 1998).

Vi kommer i nästa rapport att ytterligare belysa hur eleverna utvecklats i NV1 genom att mer i detalj studera ett antal elever. Dessutom planerar vi att göra ytterligare test av elevgruppen fram till studentexamen. Dessa test kommer eventuellt att kompletteras med andra observationer. Resultaten av dessa studier kommer att presenteras i ytterligare rapporter.

Låt oss avslutningsvis kortfattat lyfta fram några viktiga slutsatser:

- Man kan inte definiera någon minsta nivå på förkunskaper för att lyckas med algebran. De viktigaste faktorerna för att klara upp ett dåligt utgångsläge är att man (både elev och lärare) tror det skall gå och att man får visst stöd (på den nivå man är).
- God förståelse för variabelbegreppet och användningen av bokstäver samt god talförståelse är viktiga förkunskaper – viktigare än att kunna omforma algebraiska uttryck.
- Motivation och självförtroende är mycket viktigt om man skall lyckas med algebran.
- Ofta sker algebrainlärningen språngvis. Det finns trösklar man skall passera.

Referenser:

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer

Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla***.** Nämnaren Tema, Göteborgs Universitet.

Engström, A. (red) (1998). Matematik och reflektion, Studentlitteratur

Forsbäck, M, Olsson, I & Stener L. (2000). Vad har snäckor, pinnar, kottar och luvor med algebra att göra ? I *Utställningar*, 11:e Matematikbiennalen Göteborg 27-29 januari 2000

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. I D.A. Grouws (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan.

Malmer, G. & Adler, B. (1996). *Matematiksvårigheter och dyslexi*, Lund: Studentlitteratur.

Persson, P. & Wennström, T. (1999). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse.*
Tsunami nr. 1, 2003
Rapport Högskolan Kristianstad.
(rapporten kan beställas via e-post: wennstrom.tomas@telia.com)

Wagner, S. & Kieran, C. (1989). *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra.* National Council of Teachers of Mathematics

Bilaga 1. Diagnostiskt test i algebra för NV2

Du får inte använda räknare, men du får naturligtvis göra räkningar på kladdpapper. Testet är en uppföljning av algebran i åk 1.

Del 1. *Endast svar. Svara på provbladet.*

1. Lös ekvationerna nedan

   a) $4x - 15 = 75$ ....

   b) $\frac{x}{5} + 6 = 14$ ....

   c) $2^x - 1 = 7$ ....

   d) $x^2 - 6x + 8 = 0$ ....

2. Låda A väger a kg, låda B väger 50 kg mer än låda A och låda C väger 3 gånger så mycket som låda A. Hur mycket väger

   a) låda B ....

   b) låda C ....

   c) låda A + låda B (förenkla svaret)

   ....

   d) alla tre lådorna (förenkla svaret)

   ....

   b) Hur många rader får man för 200 kr ?

   ....

3. *   ***   *****   ***** **
fig 1   fig 2   fig 3   fig 4

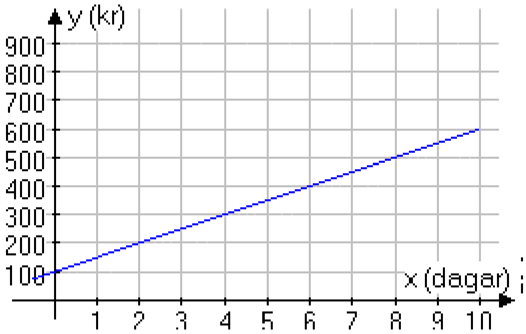
a) Hur många stjärnor har fig 10 ?

....

b) Hur många stjärnor har fig n ?

....

4. Diagrammet visar sambandet mellan kostnaden och antalet dagar då man hyr en cykel.



Skriv en formel för linjen.

....

5. Förenkla uttrycken

a) $y + 3(4 + 3y) + 8$

....

b) $10x + 3(4 - 3x) + 8$

....

c) $10x - 3(4 - 3x) - 8$

....

d) $(2x - 5)(3x + 4)$

....

***Del 2.** Lösning lämnas. Skriv på provbladet.*

6. Lös ekvationerna nedan
   a) (3x-8) +(x+3) = 10

   b) 3(20+y) - 2(5+2y) = 40

   c) $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2 = 96$

7. Förenkla uttrycken
   a)) (3x-4)(5-3x) + (2x+3)(-4x+3)

   b) 4(3x-4)(5-3x) - 3(2x+3)(-4x+3)

8. Givet ett tal. Öka talet med 5. Multiplicera därefter summan med 3. Subtraherar du denna produkt från talet 100 blir resultatet 12. Vilket var det givna talet ? Ställ upp och lös en ekvation.

Namn:_________________________

Bilaga 2.
Matematikenkät för NV2

Den här enkäten är en uppföljning av den du gjorde i åk1. Avsikten är att kartlägga elevers inlärning i framför allt algebra. Genom att vi får bättre kunskap om detta hoppas vi kunna förbättra matematikundervisningen.

I alla rapporter och andra sammanhang där studien presenteras kommer namnen att plockas bort och ersättas med anonyma beteckningar.

Försök svara så tydligt och fullständigt du kan. Använd egna ord och kan du förklara något på flera sätt så gör det. Kan du inte förklara något allmänt försök i stället att ge ett exempel. Om du behöver mer plats använd baksidan.

Namn:_________________________________ Klass: __________

1. **Vad tycker du om matematik nu? Förklara t.ex. i termer som roligt - tråkigt, lätt - svårt osv. Förklara gärna varför du tycker som du gör.**

2. **Vad tycker du om algebra och hur tycker du att du klarar algebran?**

3. Förklara för en kamrat hur man löser ekvationssystemet nedan. Skriv så du tror kamraten kan förstå.

$$\begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$$

4. Vi skriver $y = 2x + 5$. Vad menar man med det ? Hur hänger t.ex. x och y i hop ? Förklara helst på mer än ett sätt.