



Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse III

Innehållsförteckning

Förord	3
Bakgrund	4
Resultat	4
Elev A (pojke).....	4
Elev B (flicka).....	5
Elev C (flicka).....	6
Elev D (flicka).....	8
Elev E (flicka).....	10
Elev F (pojke).....	10
Elev G (pojke).....	12
Elev H (flicka).....	13
Elev J (pojke).....	14
Elev K (pojke).....	15
Sammanfattning och slutsatser	16
Referenser:	17
Bilaga 1. Diagnostiskt test i algebra för åk 1	19
Bilaga 2. Diagnostiskt test i algebra för NV2	22

Förord

Detta är den tredje i en serie rapporter, som presenterar resultat från en longitudinell undersökning av de NV-elever, som höstterminen 1998 påbörjade sina gymnasiestudier vid Klippans Gymnasieskola. Avsikten med studien är främst att undersöka hur elevernas algebraiska förmåga och förståelse utvecklas under gymnasietiden. Denna rapport kommer att mer i detalj beskriva några elevers utveckling under huvudsakligen första året på gymnasiet, men den innehåller också en del iakttagelser från NV2.

Dessa studier har möjliggjorts dels genom ett generöst bidrag från Gudrun Malmers Stiftelse, dels genom anslag från Skolverket. De ingår som en del i ett projekt i matematikdidaktik, som i samarbete med Högskolan Kristianstad pågår i Klippans kommun. Vi vill också framföra ett stort tack till universitetslektor Barbro Grevholm, Högskolan Kristianstad för mycket hjälp, uppmuntran och konstruktiv kritik under arbetets gång.

Bakgrund

Höstterminen 1998 påbörjades en longitudinell undersökning av de elever (ca. 100 st. i 4 klasser), som då började i NV1 vid Klippans Gymnasieskola. Avsikten var att följa dessa elever under gymnasietiden och studera hur deras algebraiska förmåga och förståelse utvecklas. För att göra detta används bl.a. test, enkäter, intervjuer och observationer av eleverna. I en första rapport presenterades resultat från höstterminen 1998 (Persson & Wennström, 1999). Våren 2000 har en andra rapport publicerats. Den beskriver huvudsakligen läget vid starten i NV2 och vad som hänt med gruppen som helhet under första året i gymnasieskolan (Persson & Wennström, 2000).

Dessa båda rapporter innehåller en relativt fyllig diskussion om bakgrunden till undersökningen, använda metoder och de frågor angående algebraic learning vi ställt. En del resultat och slutsatser från materialet presenteras också. Vi hänvisar den intresserade läsaren till dessa båda rapporter för ytterligare detaljer.

I den här rapporten kommer vi att koncentrera oss på ca. 10 elever och beskriva deras utveckling mer i detalj. Eftersom vi samlat in och sparat mycket av elevernas skriftliga redovisningar som t.ex. test och prov har vi ett stort material att bearbeta. Vi hoppas att en mer detaljerad analys av detta skall ge ytterligare kunskap om hur elevers algebraic learning går till och vad som försvårar respektive underlättar framsteg.

Av speciellt intresse är de elever, som haft ett dåligt utgångsläge vid starten i NV1, men lyckats förbättra sin situation. Finns det speciella faktorer, som bidragit till detta? I vår förra rapport framhöll vi bl.a. de s.k. affektiva faktorernas (t.ex. motivation och självförtroende) betydelse. Faktiskt är eleverna med mycket goda förkunskaper av minst intresse i detta sammanhang. De lyckas ofta mycket bra med sina matematikstudier, även om de också kan ha vissa problem. De har - för att använda Carolyn Kierans terminologi - uppnått ett strukturellt tänkande i algebra (Kieran, 1992; jfr. också Persson & Wennström, 2000, sid.16). Vid urvalet av elever i denna studie har vi därför mest tagit med elever, som har dåliga eller genomsnittliga förkunskaper i algebra (mätt med förkunskapstestet i NV1).

Resultat

Diskussionen nedan grundar sig på det material, som vi samlat in i NV1 och NV2. Det består av de två test (se Bil.1 och 2), som genomfördes i början av NV1 (maxpoäng 40) respektive NV2 (maxpoäng 21) och de båda enkäter, som eleverna besvarade samtidigt. Annat skriftligt material som test och prov samt intervjuer och samtal med eleverna kompletterar bilden. Dessutom har vi - genom att vi undervisat i vår sin klass - kunnat observera eleverna kontinuerligt (jfr. Persson & Wennström, 1999 och 2000).

Elev A (pojke)

På det inledande testet i NV1 har han 27 poäng av 40 och ligger därmed under genomsnittet. De största bristerna finns - naturligt nog - i förmågan att förenkla. Så blir t.ex.

$$a - 3a + 2a = -1a \text{ och } y + 3(4 + 3y) + 8 = 6y.$$

Dessa fel tyder på grundläggande brister i att hantera uttryck vid gymnasiestarten.

I början av vårterminen går det bättre, men fortfarande är osäkerheten stor vid förenklingar. Så blir t.ex. $(3x + 4) - (4x - 3y)$ och $2x^2(3x + 4) - 3x^2(4x - 3)$ rätt. Däremot gör han teckenfel och får

$$(3x - 4y) - (-4x + 3y) = 3x - 4y - 4x - 3y = -1x - 7y .$$

Denna typ av fel tyder på brister i talförståelsen vad gäller negativa tal. Mer algebra i grundskolan hade kanske inte förbättrat situationen utan mer tid skulle kanske lagts på att förbättra talförståelsen i olika sammanhang ?

Han klarar enkla andragsradsekvationer. Ett uttryck av formen $(2a + 5b)^2 - (2a - 5b)^2$ förenklar han korrekt även om han använder binommultiplikation i stället för en inlärdd kvadreringsregel. Vilket som är bäst kan faktiskt diskuteras. För många elever blir oftast kvadreringsreglerna mekaniska och ofta gör man fel, då man inte har dem aktuella och skall använda dem i någon tillämpning. Man "tror" man minns regeln – men det gör man inte!

Ekvationen $3(x + 2)(x - 2) = (3x - 2)(x + 4)$ löses rätt. När han bara får hålla på med algebra går det rätt bra, även om en hel del brister syns bl.a. på hanteringen av tecken. Man kan dock märka en rätt stor osäkerhet. Slutprovet på B-kursen går inte så bra även om både det och slutbetyget blir godkänt. Ett antal algebraiska småfel kostar många poäng. Testet vid början av höstterminen i NV2 går inte alls bra. A har bara 8 poäng av 21 och gör många slarvfel vid förenklingar. Även fel, som visar dålig förståelse, finns t.ex.

$$(2x - 5)(3x + 4) = 6x^2 - 20.$$

A är således fortfarande osäker i algebra – alltför osäker – när han börjar i NV2. Vid samtal säger han att han inte tycker att han klarat algebran så bra.

På högstadiet sysslade A väldigt lite med algebra och det spelar självfallet en roll i sammanhanget. Vid testet i början av NV2 spelar naturligtvis också glömskefaktorer in. A skulle behöva förbättra sina algebraiska kunskaper ytterligare. Det är dock inte säkert att mer träning i att förenkla hade förbättrat situationen. Det är snarare så att bl.a. brister i grundläggande talförståelse ger problem med algebran. Kanske också den utveckling vid algebrainläring, som enligt Kieran sker från ett procedurmässigt tänkande till ett strukturellt, inte har skett på ett bra sätt (Kieran, 1992; jfr. också Persson & Wennström, 2000, sid.16). Det kan ha blivit "glapp" mellan olika skolstadier.

Det positiva med A är att han – trots svårigheterna – inte på något sätt gett upp utan hela tiden kämpar på. Han har deltagit i det stöd, som förekom i NV1, och hela tiden trott att det skall gå att klara av matematiken. Han har helt klart gjort framsteg, även om han är osäker och har formella brister. Hans matematiska tänkande går framåt. Från att på B-kursen ha precis godkänt har han nu arbetat upp sig till ett svagt VG på C-kursen. Detta visar vilken betydelse attityden har och att vi ger eleverna tid att utvecklas. Ofta har vi nog för bråttom i skolan. Det måste få ta tid att lära sig matematik. Vi måste också försöka skapa situationer, där eleven får lyckas, även om förkunskaperna inte är de bästa. Det skall bli spännande att se hur situationen är för A vid slutet av NV2.

Elev B (flicka)

Lyckas relativt bra på förkunskapstestet i NV1 med 32 poäng av 40. Det enda som inte går bra är förenklingar så blir t.ex.

$$a - 3a + 2a = 4a \text{ och } 10x - 3(4 - 3x) + 8 = 7x - 15.$$

Däremot klarar B alla uppgifter på testet, där man skall ställa upp ett algebraiskt uttryck. Hon är positiv till algebra, vilket framgår av enkäten.

Jag tycker att det har varit roligt och är p.g.a. att det har varit det svåraste vi gjort och det enda man fått tänka till på och man blir glad när man klarar något som är lite svårare.

Utgångsläget är således ganska bra. Trots detta uppkommer en kris längre fram, när vi i NV1 börjar arbeta mer intensivt med algebran. Det mesta gör B rätt, men ändå blir många uppgifter fel p.g.a. att hon hela tiden gör samma fel. T.ex. blir

$$2a(5a - 3b) - 3a(3a + b) = 10a^2 - 6ab - 9a^2 - 3ab = a^2 + 3ab$$

i stället för det korrekta $a^2 - 9ab$ och

$$4x^2 - 9 + 16x^2 - 1 = 20x^2 - 8$$

i stället för $20x^2 - 10$. Uppenbarligen beror felet på en missuppfattning av räkning med negativa tal. Någon sammanblandning mellan $-9 - 1$ och $(-9)(-1)$ sker, vilket leder till att en term blir positiv.

B, som är duktig i matematik, blir mycket frustrerad och det tar tid innan vi tillsammans kommer till botten av problemet. Hon blir faktiskt väldigt irriterad, när vi försöker kartlägga vad det är hon missuppfattat. I en sådan situation är det viktigt att läraren inte släpper eleven förrän både elev och lärare förstår vad felet beror på. När vi väl blivit klara över detta, blir i stort sett allt rätt i algebra. På testet i början av NV2 har B 19 poäng av 21 och i slutbetyg på B-kursen får hon MVG. I enkäten i NV2 skriver hon.

Nu har jag fattat det här med algebra. Det hade jag inte gjort innan, men nu förstår jag det. Jag har väl kommit över en sån där "tröskel". Nu klarar jag väl det mesta. Felen är oftast slarvfel. Fortfarande får jag dock tänka lite på det här med minus och plus. Det känns ännu inte helt naturligt.

Exemplet visar hur brister i talförståelse kan leda till problem med algebran. Det stöder den slutsats vi drog i vår förra rapport, att god talförståelse är en viktigare förkunskap än förmågan att kunna omforma algebraiska uttryck. Redan av testet i början av NV1 kunde man se att B hade relativt god förståelse för variabelbegreppet och användningen av bokstäver. De problem B hade visar också, att det är mycket viktigt att ordentligt analysera vad det är för fel eleven gör vid förenklingar. Vi måste se om det är brister i algebraisk förmåga eller något annat som t.ex. talförståelse. Samma situation har vi, då vi arbetar med rationella uttryck. Har eleven dålig förståelse för bråkräkning, blir förenklingar av bokstavsuttryck obegripliga för eleven och resultaten av förenklingarna mer eller mindre slumpmässiga.

Elev C (flicka)

Den här eleven är extra intressant, eftersom hon beskriver sin situation så här vid starten i NV1.

Jag har aldrig haft någon algebra i högstadiet så jag kan nästan ingenting. Det enda jag kan är lätta ekvationer. Långa ekvationer är så jobbiga och ser så svåra ut, så jag brukar ge upp om det kommer sådana på prov.

Självförtroendet vid skolstarten är således inte det bästa. C är väldigt osäker och orolig hur det skall gå. Testet i början av NV1 bekräftar C:s självbild. Hon kan lösa enkla ekvationer men misslyckas på samtliga uppgifter med förenklingar. Så blir t.ex.

$$4x - x = 4 \text{ och } a - 3a + 2a = -a$$

På enkäten kan hon förklara hur man löser ekvationen $4x + 35 = 95 - x$ på ett hyfsat sätt.

samlar x på en sida

$$4x + x = 95 - 35$$

$$5x = 60 \text{ man dividerar med 5}$$

$$x = 12$$

Hon kan däremot inte från en text ställa upp ett algebraiskt uttryck. På frågan nedan svarar hon helt fel (svar i parenteserna)

Låda A väger a kg, låda B väger 50 kg mer än låda A och låda C väger 3 gånger så mycket som låda A. Hur mycket väger

- a) låda B (100)
- b) låda C (200)
- c) låda A + låda B (förenkla svaret) (150)
- d) alla tre lådorna (förenkla svaret) (350)

Både självförtroende och förkunskaper är således väldigt dåliga. När vi så småningom börjar ägna oss åt algebra mer ordentligt, går det också rätt dåligt i början. Förenklingar blir fel.

$$2a(5a - 3b) - 3a(3a + b) = 10a^2 - 6ab - 9a^2 - 3ab = a^2 - 3ab$$

$$9(y + 2)^2 - (3y - 5)(3y + 5) = 9y^2 + 18^2 - 9y^2 - 15y + 15y + 25$$

Här bör man observera, att även om en hel del blir fel, så finns det också positiva ansatser. Det viktigaste i ett sådan här situation är att inte ge upp utan försöka analysera felet ordentligt, innan man försöker korrigera dem. C är ett exempel på att både dålig självförtroende och brister bl.a. i talförståelse försvårar algebrainläringen. Hon går på det extra stöd, som ges i NV1, och det hjälper henne säkert en hel del.

Så småningom börjar det lossna i algebra. Man kan definitivt se tröskleffekter. Hon klarar B-kursen med ett klart G och på algebratestet i början av NV2 klarar hon 15 poäng av 21. De svårare förenklingar, som förekom på testet i NV1, klarar hon nu. Uppgiften ovan om lådorna klarar hon också. På C-kursen, som inte är definitivt betygssatt ännu, ligger hon på G+. C har således – från ett ganska dåligt utgångsläge - gjort betydande framsteg. I slutet av NV1 skriver hon så här om algebra.

Jag har lärt mej lite mer nu, innan kunde jag ingenting och tyckte det var jättesvårt, nu är det enklare. Om man tar lite tid och kollar igenom tal, så blir det mycket enklare. Jag tycker att algebra är bland det roligaste i matte just nu.

På en enkätfråga om vad hon tycker om algebra i början av NV2 skriver hon.

*ganska kul beroende på tal
det går bättre och bättre, men jag tycker fortfarande att det är ganska svårt.*

Den viktigaste orsaken till att det ändå gått relativt bra för C är naturligtvis först och främst att hon inte gett upp utan kämpat på. Stödet i NV1 har säkert också haft stor betydelse. En faktor, som också skall framhållas, är kamratstödet. En grupp tjejer har stöttat varandra och det har säkert alla i gruppen haft nytta av.

Elev D (flicka)

D klarar det inledande diagnostiska testet bra med 34 poäng av 40. Hon missar de svårare förenklingarna på testet som

$$10x + 3(4 - 3x) + 8 = 7x + 11$$

$$10x - 3(4 - 3x) + 8 = 13x + 20$$

$$(2x - 5)(3x + 4) = 6x - 20$$

Även om dessa fel till viss del beror på glömska och slarv indikerar de också brister i förståelsen. I övrigt missar hon några lite svårare uppgifter på ekvationslösning som

Lös ekvationen $2^x - 1 = 7$

Hitta två olika ekvationer som har lösningen $x = 10$

Om sin inställning till matematik skriver hon på den första enkäten.

Jag tycker matematik är roligt. Det beror lite på vad för något det är också. En del är ju roligt, annat lite mindre roligt. Särskilt lätt vet jag inte om matematik är. Det är det nog inte, men man måste försöka lära sig det ändå. Och när man väl gjort det är det nog lätt.

På låg och mellanstadiet tyckte jag matte var jättetråkigt. Men sen på högstadiet mognade jag och började förstå hur det fungerar. Man måste repetera det en massa gånger innan det sitter ordentligt samtidigt som det kan ta lite tid innan man förstått själva grejen.

Lärarna har stor betydelse för vad man skall tycka om matematik. Har man en bra lärare som förklarar så att man förstår tycker man oftast att matte kan vara rätt kul.

Hennes svar på "Vad algebra är" är rätt intressant.

Det är en massa formler samt regler för hur man ska räkna ut dessa så att det blir rätt. De är till för att underlätta/hjälpa till när matten kommer till en mer avancerad nivå. För att siffrorna inte skall bli för många och krångliga har man tagit bokstäverna till hjälp

På frågan om vad hon tycker om algebra svarar hon.

Jag tycker algebra är svårt. Jag har inte räknat det så mycket och har svårt att förstå hur man skall räkna ut det. Jag kan inte det än. Allt är ganska rörigt och svårt att förstå och komma ihåg.

Utgångsläget vid starten i NV1 är således bra för D. Samtidigt upplever hon att algebran är svårt och hon har nog inte riktigt grepp om formalismen vid omskrivningar. Här kan man ana vissa brister i förståelsen. Som framgår av citaten ovan har hon en mycket positiv inställning.

Hon klarar också det mesta av algebran i NV1 mycket bra - även svårare förenklingsuppgifter som t.ex.

$$9(y + 2)^2 - (3y - 5)(3y + 5) \text{ och} \\ 3(4x - y)(x - 2y) - 2(x - 3y)(6x + y)$$

D lyckas bra med sina matematikstudier i NV1. På B-kursen får hon ett svagt MVG i slutbetyg. Testet i början av NV2 klarar hon också bra 19 poäng av 21. Om algebra säger hon på enkäten i NV2.

Jag tycker det är kul. Jag tycker jag klarar det ganska bra. På högstadiet fattade jag knappt något och förstod inte vad det skulle vara bra för att kunna. Det gör jag nu. Vi har det i de flesta karaktärsämnen: fysik, kemi, teknologi. Det är ett måste att man kan det någorlunda.

Hennes inställning till matematik har också blivit positivare.

Det är roligare. Jag förstår det bättre nu p.g.a. att vi har det så pass ofta. På högstadiet var det långa pass två gånger i veckan. Det man behöver är matte varje dag, en massa upprepning om och om igen tills det sitter där.

D framhåller tiden som en viktig faktor och att det för inläringen är bra om man har många undervisningstillfällen. I den nuvarande timplanen är tiden för Ma C och D alldeles för liten. Därför är det mycket tillfredsställande att i de nya timplanerna får dessa matematikkurser mer tid. För att kunna få en vettig förståelse av ett omfattande och för de flesta elever ganska abstrakt kursinnehåll med många matematiska begrepp behövs definitivt ordentligt med tid.

Elev E (flicka)

På det inledande testet har E ett genomsnittligt resultat 29 poäng av 40. Hon missar det mesta på förenklingar och visar dålig förståelse för detta område. T.ex. blir

$$a - 3a + 2a = a - 5a \quad \text{och} \\ y + 3(4 + 3y) + 8 = 3y \cdot 7y + 8$$

Dessa fel tyder på rätt stora missuppfattningar. Enkla algebraiska uttryck kan hon ställa upp. På exemplet med lådorna (se sid. 7) klarar hon deluppgift a och b. Hon klarar av att ställa upp ett korrekt uttryck även på deluppgift c, men hon förenklar det inte. Hon visar god förmåga att lösa ekvationer och behärskar även linjära funktioner väl.

När vi sedan arbetat med algebra ett tag, gör E fortfarande en hel del allvarliga fel vid förenklingar.

$$(3x - 4y) - (-4x + 3y) = 3x - 4y + 4x + 3y = 12x^2 + 9xy - 16xy + 12y^2$$

Förutom att hon gör teckenfel förväxlar hon räknesätt och utför en binommultiplikation i stället för att samla ihop termerna. Hon klarar däremot nästan av uttryck som

$$(2x + 3)(2x - 4) - (2x + 4)(2x - 3) \quad \text{och} \\ 4(x + 1)(x + 2) - 3(x - 1)(x - 4)$$

På dessa båda uppgifter gör hon ett teckenfel. E visar här en osäkerhet både vad gäller förmåga och förståelse. En del begrepp och förfaranden har uppenbarligen inte fallit på plats, men samtidigt finns mycket som visar på att en positiv utveckling är möjlig. I det här läget är det viktigt, att man lyfter fram vad som trots allt är bra och uppmuntrar eleven. Grundförutsättningen för att lyckas är att man tror att det skall gå.

E arbetar på och gör framsteg. Vid testet i början av NV2 har hon rätt på alla uppgifterna. Om algebran säger hon.

Algebra är roligt, men svårt. Och jag tycker att jag klarar algebran ganska bra.

E är ett klart exempel på att det mesta av förenklingsalgebran kan klaras av i NV1 och att det kanske är andra förkunskaper, som är viktigare. Vid starten i NV1 hade hon goda förkunskaper i det mesta utom förenklingar. Under arbetet i NV1 har hon haft problem, men hon har hela tiden gjort framsteg. I NV2 har hon fortsatt sin positiva utveckling och kommer att få MVG på C-kursen. Hon är också ett exempel på att samarbete vid matematikinläring ger positiva effekter.

Elev F (pojke)

När han börjar studierna på NV-programmet har han ett svårt utgångsläge när det gäller matematiken. På det fördiagnostiska testet i algebra uppnår han bara 14 poäng av 40 möjliga, vilket placerar honom bland dem, som har de lägsta resultaten i årskursen. Även de övriga testen går dåligt, speciellt det i numerisk räkning.

Enkla ekvationer klarar han dåligt, t. ex.

$$x + 25 = 55 \quad \text{löser han som} \quad x = 25$$

Det verkar dock som om flera av hans fel beror på hans brister i aritmetik och taluppfattning, vilket också slår igenom när han skall pröva ekvationslösningar eller göra värdeberäkningar av uttryck.

Förenklingar av uttryck klarar han nästan inte alls av. Exempelvis svarar han

$$4x - x = 4 - x$$

$$a - 3a + 2a = a - 5a$$

$$10x + 3(4 - 3x) + 8 = 11x + 11$$

Han visar här hur ytterst dimmiga begrepp han har om vad de algebraiska symbolerna står för och hur man kan bearbeta dem. Detta är också tydligt i testuppgiften med algebraiska uttryck (svaren i parenteserna)

Låda A väger a kg, låda B väger 50 kg mer än låda A och låda C väger

3 gånger så mycket som låda A. Hur mycket väger

a) låda B (100 kg)

b) låda C (300 kg)

c) låda A + låda B (förenkla svaret) (50 + 100 = 150 kg)

d) alla tre lådorna (förenkla svaret) (450 kg)

Andra uppgifter går förvånansvärt bra för honom. Han klarar t. ex. uppgifter med avläsning av diagram och beräkningar med en linjär formel utmärkt, dock med förbehållet att han inte alls klarar att sätta upp en egen formel.

Hur ser då elevens bakgrund ut? På grundskolan gick han i en helt sammanhållen klass i matematik. Någon form av nivågruppering hade man inte enligt honom själv, och det var mycket lite algebra och ekvationslösning som gick igenom. Han var inte speciellt intresserad av matematik och tyckte det var ganska tråkigt. Det förhållningssättet speglas också tydligt i de intervjusvar han ger vid starten i NV1. På frågan vad han tycker om matematik svarar han:

Ganska svårt och inte speciellt roligt

Om algebra säger han:

Jag ser faktiskt ingen som helst nytta av det. Jag har aldrig stött på det ute i vanliga livet och kommer nog aldrig att göra det heller.

Skulle man ställa en prognos för hur den här eleven kommer att klara sina matematikstudier på NV, hade den nog sett rätt dystert ut. Det handlar dels om ytterst svaga förkunskaper, och dels om att hans intresse och vilja kanske inte finns. Skall man då ge upp en "sådan här" elev och konstatera att han nog inte klarar NV-programmet? Så här har det sedan gått för F:

Naturligt nog tas han ut till stödtimmarna i NV1. Vi får mer tid att diskutera matematik tillsammans. Han tränar aritmetiken, som han ju hade stora brister i. När algebrakapitlet skall inledas, får klassen skriva en essä: "Vad jag vet om algebra". Visserligen är F fortfarande avvaktande till nyttan av algebra, men han kan faktiskt berätta om flera sätt han nu vet att det kan användas till såsom formler, geometri, förenklingar eller talsymboler.

Mer än någon annan i klassen får han sedan börja från början med algebran. Han kämpar hårt, men misslyckas ändå totalt på testerna i algebra. Teckenreglerna går fortfarande dåligt, exempelvis blir

$$(3x - 4y) - (-4x + 3y) = x - y$$

Inmultiplikering i parenteser går någorlunda, men det blir missar i förenklingarna. Binommultiplikation kan han inte alls klara, och följaktligen inte heller specialreglerna. Ekvationer är också ett svårt

kapitel, där han missar i stort sett allt. Det ser inte ljust ut, men han kämpar på ganska hårt och det ger utdelning. På provet klarar han fler av de grundläggande algebra problemen, och han uppnår ett svagt G. Han har nu klarat ut flera av sina aritmetiksvårigheter och på slutproven har han höjt sina prestationer kraftigt. På slutprovet i MaA har han 23 poäng av 27 möjliga, och han klarar hem ett VG på kursen. MaB-betyget går också vägen och han får ett klart G efter ett väl genomfört slutprov.

Efter algebrakapitlet får eleverna på nytt skriva om "Vad jag vet om algebra". Nu skriver F en hel del positivt om vad man använder algebra till och avslutar med:

Jag tycker jag har lärt mig ganska mycket av det som jag inte kunde förra gången vi skrev. Innan verkade det nästan omöjligt med vissa uppgifter som numera bara är början på en svårare uppgift.

I enkäten på hösten i NV2, har F:s attityder gentemot matematiken ändrats avsevärt. På frågan vad han tycker om matematik nu, svarar han:

Ganska roligt men för tillfället alldeles för stressigt. Annars ganska kul.

Om algebran säger han:

Användbar, jag klarar den bättre nu men ändå svår. Algebran klarnar mer och mer. Den börjar till och med bli rolig.

Hans resultat blir nu allt stabilare. I MaC-kursen har han klarat godkänt på alla proven med bred marginal, och har också VG på ett. Betyget, som inte är slutligt fastställt, ligger på G+. Ett litet orosmoln är dock att det går dåligt för honom på trigonometrikapitlet, som tillhör MaD-kursen. Skulden till detta är med all sannolikhet det alltför knappa timantalet i kursen, som tvingar eleverna att hasta igenom kapitlet. Vad F framför allt behöver för att klara matematiken är tillräckligt med tid, och det har han inte fått nu. Den extra tid han hade med stödtimmarna i NV1 och förstärkningskursen på hösten i NV2, räckte för att han skulle komma ikapp de övriga och få känna att han kunde lyckas. Framför allt detta sista är nog det viktigaste för att F skulle ändra sitt förhållningssätt till matematiken och kraftigt lyfta sin förmåga.

Elev G (pojke)

Till skillnad från föregående elev har G tämligen goda resultat på de fördiagnostiska testen, kring medelvärdena. På algebratestet har han 30 poäng av 40, och det finns inget speciellt skäl att ta ut honom till stödtimmarna i NV1. Felen på testet är mest av karaktären lapsusfel samt vissa brister i de svårare momenten, t. ex. binommultiplikation. Enkätsvaren är ganska magra och säger inte mycket om hans attityder gentemot matematikämnet.

På högstadieskolan han kom från arbetade man med tre olika svårighetsnivåer i matematik, och G tillhörde mellangruppen. Han såg inga speciella svårigheter framför sig vad det gällde att klara kurserna. Intrycket var snarast att han tog det hela med en "klackspark".

MaA-kursen går hyggligt, med provresultat av G- och VG-karaktär. Slutprovet går mediokert med bara 17 poäng av 27, men betyget blir i alla fall ett VG. Svårare blir det med MaB-kursen. Algebratesten går inte så bra. Han missar mycket på teckenbyten och gör fel av typen:

$$3x(xy + 5y) + 3y(xy - 5x) = 4x^2y + 15xy + \dots$$

Han har vissa problem med specialreglerna, men framför allt har han fel på samtliga andra-

gradsekvationer. På provet får han ett medelmåttigt resultat på G-nivå med samma feltyper som på testen. Betyget på kursen blir så småningom ett G.

I essän "Vad jag vet om algebra" efter algebrakapitlet skriver G mycket kortfattat om vad algebra kan användas till. Han avslutar dock med:

Jag har fått fördjupad insikt i algebra.

På det diagnostiska testet hösten i åk 2 visar han upp i stort sett samma brister som på tidigare prov och tester. Han kan nu inte heller riktigt klara av uppgiften med algebraiska uttryck (Låda A väger a kg, låda B väger 50 kg mer än låda A...), vilken han klarat felfritt i testet i åk 1! Hans prestationer har i stort sett stått still ett bra tag. Orsaken är säkert att han tagit lite för lätt på hur mycket arbete han måste sätta in i matematiken för att nå framgång. Istället har han trott att "allt nog ska ordna sig till slut i alla fall". Det kan man märka i de svar han ger på enkäten. Han tycker så här om matematik:

Jag tycker att matten har blivit roligare nu när man har lärt sig lite mer.

Algebran:

Algebra är sådär roligt, jag tycker att jag klarar det ganska bra.

Han ger även bra förklaringar på hur man löser ekvationssystem och vad $y = 2x + 5$ kan innebära, vilket tyder på att han har en bra matematisk grundförståelse.

I MaC-kursen har G fått nya svårigheter, och han har nu upptäckt att det inte går att hanka sig fram på gamla kunskaper. Svaga resultat på skrivningar gör att hans betyg ligger på G-. Liknande resultat har kommit på trigonometrikapitlet. Vad man dock kan säga om G är att han nog håller på att komma till insikt om att det behövs både vilja och mycket arbete för att klara matematikkurserna, och det innebär förmodligen en vändpunkt för honom.

Elev H (flicka)

Hon har bra resultat på förtesterna, bara några smärre fel oftast av lapsuskaraktär. På testet i algebra har hon 36 rätt av 40, vilket placerar henne över medelvärdet. Hon missar exempelvis binommultiplikationen och ekvationen $2^x - 1 = 7$, men de tillhörde ju de svårare uppgifterna.

I enkäten tycker hon om matematik:

Det är alltid kul när man förstår det. Såklart så varierar det från sak till sak. Ibland är allting jättelätt eller så tvärtom. Det beror på vad vi sysslar med.

På frågan vad algebra är, svarar hon:

När man ersätter siffrorna med bokstäver. Formler inom fysiken är t ex algebra. Man räknar då alltid likadant men kan variera siffrorna och uppgifterna.

Hon ser det alltså ur en ren nyttoaspekt, kanske inte alltid så roligt:

Det är lätt långtråkigt ibland, speciellt förenklingar och liknande. Rätt så svårt ibland.

Hon har helt klart för sig hur man löser en ekvation som $4x + 35 = 95 - x$ och förklarar ledigt vad som menas med $y = x + 5$. Det beror på att hon fått arbeta en hel del med algebra på

högstadiet, där hon tillhörde den snabba gruppen av tre. Hon har en trygg grund att börja från när gymnasiekurserna startar.

Testerna, som hon fick när algebrakapitlet gicks igenom, klarar hon ganska bra, men gör även nu smärre lapsusfel. I en längre förenklingsuppgift ger tyvärr även ett litet misstag fel svar, även om den i huvudsak lösts rätt. H råkar ofta ut för det här problemet att hennes resultat naggas lite i kanten av dessa småfel. Men det kan vara svårt att rätta till!

När hon får skriva om algebran räknar hon ledigt upp olika sätt man kan använda den till. I den första essän inleder hon med:

Algebra är när man räknar med bokstäver istället för med siffror. Det kan användas när man saknar siffror i en uppgift. Ofta inom algebran får man inte fram ett svar i siffror utan måste svara i bokstäver. För att kolla ett sådant svar kan man sätta in siffror istället.

H visar redan här prov både på förmågan till ett procedurellt och till ett strukturellt tänkande när det gäller algebran (Kieran 1992; Persson & Wennström, 2000, sid. 16). Vad hon behöver är övningar som vidareutvecklar hennes färdigheter och gör henne mer säker på detaljerna.

Proven går genomgående bra för henne med resultat på VG- och MVG-nivå. Hon får MVG på MaA-kursen och VG+ på MaB-kursen.

Det diagnostiska provet i NV2 har H endast ett felsvar på. Det är en längre förenkling, som hon gör ett avskrivningsfel och ett teckenfel på. Naturligtvis vet hon hur det egentligen skulle varit. På enkäten skriver hon så här om vad hon tycker om matematik:

För det mesta är det roligt och intressant men ibland är det svårt, då är det inte lika kul.

Om algebra:

Jag har haft lätt för det hittills, sen om det är roligt är ju en annan sak. Intressant att kunna!!

Hon har under åk 2 nått goda resultat i MaC-kursen och får ett VG i betyg. Det fortsätter sedan med liknande prestationer på MaD-kursen, dvs på VG-nivå. Hon klarar sig hyggligt utan att kanske komma upp i de riktiga toppresultaten. Men hon var ju också mest inne på nyttoaspekten för andra naturvetenskapliga ämnen från början, och det kommer hennes färdigheter gott att räcka till så här långt.

Elev J (pojke)

I intervjun och enkäten i NV1 tycker J inte att matematik egentligen är en stor svårighet för honom. Tyvärr hade han haft lite tråkig erfarenhet på högstadiet. Han skriver:

På låg- och mellanstadiet tyckte jag matte var kul men sedan i högstadiet fick jag en dålig lärare som inte hade någon lust att hjälpa.

Han får svårt med övergången till gymnasiematematiken, och delar av algebran säger han, att han aldrig stött på. På det diagnostiska testet missar han de flesta av ekvationerna och det beror enligt honom på att han nästan inte alls tränat ekvationslösning och att han aldrig förstått vad det gick ut på. Men hans grundinställning är god:

Matte är väl lätt om man förstår det, om man får det förklarad. Då tycker jag det är kul.

J får delta i stödgruppen i NV1. Han behöver lite mer tid för att förstå nya begrepp än de andra och han har ett stort behov av att få diskutera dem med läraren för att riktigt få grepp om dem. Sedan går det oftast bra för honom att lösa uppgifterna, men han behöver ändå få fråga lite då och då som en bekräftelse på att han är på rätt väg.

I MaAB-kurserna går det hyggligt på de prov han gör, men algebraprovet är svagt med bara ett G-. Han har framför allt problem med ekvationer av olika slag inklusive problemlösning med hjälp av ekvation, men även förenklingar i vilka binommultiplikation eller specialreglerna ingår går dåligt. På några uppgifter lämnar han helt enkelt ingen lösning alls.

När han skriver om algebra i "Vad jag vet om algebra", uttrycker han sig på ett sådant sätt att han klart visar att han förstått vad det hela handlar om. Men han är också medveten om sina brister:

Algebra är för mig logiskt, och ibland helt och hållet ologiskt. Vissa uppgifter kan vara så enkla och enkla, medan andra, som kanske är enkla, verkar för mig helt omöjliga.

När man ser på de tester J gjorde under algebrakapitlet, upptäcker man att hans problem mycket beror på att han inte förstått vissa av de uttryckssätt man använder sig av i algebra. En förenkling kan han börja så här:

$$3x(xy + 5y) + 3y(xy - 5x) = 4xy + 3x5y +$$

och sedan skriver han inget mer. En annan blir så här:

$$4(x + 1)(x + 2) - 3(x - 1)(x + 4) = 4x + 4 \cdot x + 2$$

Här krävs mycket samtal och diskussioner för att få någorlunda rätsida på J:s grundförståelse av uttryckssätten i algebra och vilka spelregler man har. En viss framgång blir det, och han klarar slutproven klart Godkänt. Ändå skriver han i den avslutande essän om algebra att han inte är riktigt nöjd och att han känner att behöver lära sig ännu mer, även om han tycker att han kan betydligt mer än förra gången han skrev.

På testen i början på NV2 klarar J nu av grundläggande ekvationer och förenklingar, men de svårare uppgifterna går han fortfarande bet på. Skillnaden är att nu är det mest frågan om t. ex. teckenfel eller att han glömmer faktorn 2 i mellantermen, när han utvecklar enligt kvadreringsreglerna. Han lämnar också svar på samtliga uppgifter. I enkäten skriver han:

Algebra kan ibland vara svårt men jag tycker att det går ganska så bra.

Han har också kvar en positiv grundinställning till matematiken, som han tycker

...känns kul var gång man lyckas lösa ett tal.

På MaC-kursen har hans prestationer ytterligare förbättrats och på proven har han legat stadigt parkerad strax under VG-gränsen. Betyget ligger f n på G+. Trigonometrikapitlet brukar vara svårt för dem, som har problem med algebran, men där har det också gått bra för J. Hans resultat pekar även här upp mot VG. Enligt honom själv tycker han inte att han har några stora problem med matematiken längre, och de saker han hakade upp sig på tidigare säger han nu är lätta. Det var några bestämda trösklar han var tvungen att få hjälp att komma över. Sedan har hans matematikfärdigheter kunnat utvecklas i normal takt igen.

Elev K (pojke)

Denne elev hade med sig mycket goda förkunskaper från grundskolan. På högstadiet hade han tillhört den snabbaste gruppen av tre och hade fått öva en hel del ekvationslösning och förenklingar. Han hade även klart för sig hur binommultiplikation gick till och kunde specialreglerna. Förtesterna klarar han så gott som felfritt med bara något litet lapsusfel. Men det han skriver i enkäten om matematik är inte så roligt:

Matte är lätt för mig. För det mesta roligt också. Under praktiskt hela grundskolan har jag förstått allting och har legat på de högsta betygen/poängen. Då jag har kunnat allt har jag ibland suttit sysslolös, och därför ser jag inte matematik som en utmaning längre. På högstadiet kunde jag prata på lektionerna hur mycket som helst, jag fick ändå högsta betyg. Det kan låta som att jag skryter, men faktum är att min inställning till matte nog är en aning fel.

Ändå skriver han om algebra:

Det är ett av de områden som jag tycker är minst lätt. Jag har förstått att det därför är ganska viktigt.

När han redogör för vad han vet om algebra inför kapitlet, beskriver han fylligt flera olika användningsområden och förklarar korrekt en mängd termer inom algebran. Han har uppenbarligen rätt klart för sig vart han vill. Problemet för K är att han ofta hade en tendens till att vara lat. Han tar också ofta rätt nonchalant på sina uppgifter, och när man ger honom riktigt svåra saker att pröva sin förmåga på, ger han lätt upp och klarar dem inte.

Han får dock ett MVG både i MaA- och i MaB-kurserna. När han efteråt skrev om algebra, har han lagt till några nya områden han har lärt sig som funktionslära och andragradsekvationer. Testen i NV2 har han bara ett fel på. Det är en ekvation, som han i matematikundervisningen inte fått lära sig någon speciell metod att lösa:

$$2^x - 1 = 7$$

Han svarar $x = 4$ precis som han gjort på förtestet i NV1. Uppenbarligen kan han inte ge sig ordentligt i kast med denna okända ekvationstyp och t ex pröva sig fram. Istället försöker han med "kända" metoder som att dividera med 2 i sista ledet, fastän det ger ett felaktigt svar. I enkäten är han medveten om att han inte riktigt når ända fram alltid:

Jag tycker algebran fungerar rätt bra för mig. Men allt kan förbättras.

När vi samtalar om hans inställning till matematiken, säger han att han förstått att han tagit den lite för mycket med en "klackspark". Han har ofta slarvat med läxorna och tyckt att det nog ordnar sig ändå. Men nu har svårighetsgraden höjts betydligt i MaC- och MaD-kurserna. K har nu tagit sig i kragen och börjat anstränga sig mera. Detta har också gett utdelning i form av goda resultat på prov och tester, vilket kommer att ge honom ett MVG på MaC. Även på de delar av MaD-kursen vi hittills läst, har han visat att han tar matematiken på större allvar och att han försöker vara mer noggrann. Insikten om sin egen förmåga och kanske i högre grad sin egen begränsning kommer sannolikt att hjälpa honom att klara matematiken på ett bra sätt.

Sammanfattning och slutsatser

De flesta av de slutsatser vi drog i vår förra rapport stärks av den här studien (Persson & Wennström, 2000). Vi ser att betydelsen av affektiva faktorer är stor. Attityden man har till matematik är viktig. Om man har självförtroende och motivation, så kan man lyckas även om förkunskaperna är dåliga. Det är då väsentligt att man sätts i situationer, där man kan lyckas, och att läraren hela tiden stödjer och uppmuntrar en. Det är viktigt att lyfta fram det som fungerar bra. Eleven måste få tid att utvecklas. Tidsfaktorn är av oerhört stor betydelse vid all matematikinläring. Vi får inte ha för bråttom.

Den här studien visar också att god talförståelse är nödvändig för att kunna lära sig algebra. Utan ordentlig talförståelse blir mycket av förenklingsalgebran obegriplig och eleven kommer hela tiden att göra fel. Om det finns brister i grundläggande talförståelse, måste de repareras, innan det blir meningsfullt att systematiskt träna förenklningar.

Vi ser också klara tröskleffekter hos ett antal elever. Ofta lossnar det ordentligt i algebra, när man förstår vissa begrepp. T. ex. i kan brister i förståelsen av aritmetik försvåra algebrainläringen. Ibland kan det vara frågan om att rätta till några små detaljer för att få det hela att fungera. Det är mycket viktigt att man gör en ordentlig analys av vad det är som orsakar att eleven gör fel.

Vi anser oss från våra studier ha fått stöd för att det mesta av förenklingsalgebran (parentesregler, binommultiplikation osv.) kan klaras av i NV1. Detta innebär inte att vi ansluter oss till åsikten att man inte skall syssla med algebra i grundskolan.

Trots tydliga siffror som pekar i denna riktning (se t.ex. Johannsson, 1998a) och att t.ex. algebra behandlas ett par år senare i svensk skola än i många jämförbara länder, vill många högstadielärare flytta sådana kunskapsområden ännu längre upp i skolsystemet. (Johansson, 1998 sid. 12)

Tvärtom menar vi att man skall börja med algebra tidigt, men att man skall koncentrera på andra aspekter som variabelbegreppet och lära sig använda bokstäver i olika sammanhang gärna genom laborativt material av olika slag (se t.ex. Forsbäck et al, 2000 och Malmer, 1999). Självfallet skall inte de elever, som kommit långt i sin matematiska utveckling, hindras utan få möjlighet att även syssla med svårare saker i algebra. I våra studier har vi stött på duktiga elever, som säger sig tappat intresset för matematik på högstadiet för att de inte utmanats. Vi vill i detta sammanhang upprepa vårt tidigare förslag att man får till stånd en studieövergripande diskussion om lämpliga studiegångar i algebra (den röda tråden i algebran).

Vi planerar att avsluta våra undersökningar av gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse med ett par test i slutet av NV2 och NV3. Resultatet av dessa och en sammanfattning av vår undersökning kommer att presenteras i kommande rapporter. För att ytterligare vidga kunskapen om algebrainläring i Sverige borde läromedlens roll från förskola till högskola studeras. De nationella provens roll som styrinstrument i detta sammanhang borde också undersökas.

Referenser:

- Forsbäck, M, Olsson, I & Stener L. (2000). Vad har snäckor, pinnar, kottar och luvor med algebra att göra ? I *Utställningar*, 11:e Matematikbiennalen Göteborg 27-29 januari 2000
- Johansson, B. (1998) *Förkunskapsproblemet i matematik ?*. Rapport inst f. ämnesdidaktik, Göteborgs universitet

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. I D.A. Grouws (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

Malmer, G. (1999). *Bra matematik för alla*, Lund: Studentlitteratur.

Persson, P. & Wennström, T. (1999). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse*. Rapport Högskolan Kristianstad.

Persson, P. & Wennström, T. (2000). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse II*. Rapport Högskolan Kristianstad.

(rapporterna kan beställas via e-post: wennstrom.tomas@telia.com)

Bilaga 1.

Diagnostiskt test i algebra för år 1

Du får inte använda räknare, men du får naturligtvis göra räkningar på kladdpapper. Testet skall hjälpa oss att lägga upp dina matematikstudier på bästa sätt. Skriv svar på bladet..

1. Lös ekvationerna nedan

a) $x + 25 = 55$

b) $x - 25 = 55$

c) $5x = 45$

d) $x/5 = 8$

e) $4x - 15 = 75$

f) $\frac{x}{5} + 6 = 14$

g) $2^x - 1 = 7$

2. Hitta på två olika ekvationer som har lösningen $x = 10$.

.....

.....

3. Vilket av talen nedan är en lösning till ekvationen.

5 10 15 20 25

a) $4x + 30 = 80 - x$

.....

b) $5x - 10 = 130 - 2x$

.....
4. Vilket eller vilka skrivsätt nedan anger alltid ett tal som är.

$$\begin{array}{cccc} k + 5 & k + 2 & 2k & k + k \\ 0,5k & \frac{k}{2} & \frac{k}{5} & 5k \end{array}$$

a) dubbelt så stort som k

.....

b) hälften så stort som k

.....

c) 5 gånger så stort som k

.....

d) 2 mer än k

.....

5. Förenkla uttrycken

a) $4x - x$

b) $8x + 15 + 4x - 5$

c) $a - 3a + 2a$

d) $y + 3(4 + 3y) + 8$

e) $10x + 3(4 - 3x) + 8$

.....

f) $10x - 3(4 - 3x) - 8$

.....

g) $(2x - 5)(3x + 4)$

.....

6. Beräkna uttryckets värde om $x = 20$

- a) $5x + 25$
- b) $500 - 10x$
- c) $x^2 + 50$
- d) $x^2 + 10x$
- e) $2x^2$
- f) $(x + 10)^2$

7. Låda A väger a kg, låda B väger 50 kg mer än låda A och låda C väger 3 gånger så mycket som låda A. Hur mycket väger

- a) låda B
- b) låda C
- c) låda A + låda B (förenkla svaret)
.....
- d) alla tre lådorna (förenkla svaret)
.....

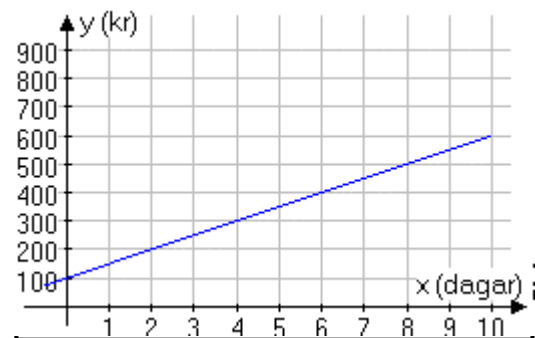
8. Kostnaden y kr för en tidningsannons beräknas så här:
 $y = 50 + 10x$, där bokstaven x betecknar antalet rader i annonsen.

- a) Hur mycket kostar 10 rader ?
.....
- b) Hur många rader får man för 200 kr ?
.....

9. * *** ***** ***** **
fig 1 fig 2 fig 3 fig 4

- a) Hur många stjärnor har fig 10 ?
.....
- b) Hur många stjärnor har fig n ?
.....

10. Diagrammet visar sambandet mellan kostnaden och antalet dagar då man hyr en cykel.



- a) Vad kostar det att hyra en cykel i sex dagar ?
.....
- b) Hur många dagar kan man hyra en cykel för 300 kr ?
.....
- c) Vad är grundavgiften ?
.....
- d) Skriv en formel för linjen.
.....

Namn: _____

Bilaga 2.

Diagnostiskt test i algebra för NV2

Du får inte använda räknare, men du får naturligtvis göra räkningar på kladdpapper. Testet är en uppföljning av algebran i åk 1.

Del 1. Endast svar. Svara på provbladet.

1. Lös ekvationerna nedan

- a) $4x - 15 = 75$
- b) $\frac{x}{5} + 6 = 14$
- c) $2^x - 1 = 7$
- d) $x^2 - 6x + 8 = 0$

2. Låda A väger a kg, låda B väger 50 kg mer än låda A och låda C väger 3 gånger så mycket som låda A. Hur mycket väger

- a) låda B
- b) låda C
- c) låda A + låda B (förenkla svaret)
.....

d) alla tre lådorna (förenkla svaret)

.....
b) Hur många rader får man för 200 kr ?

.....

- 3. * *** ***** ***** **
fig 1 fig 2 fig 3 fig 4

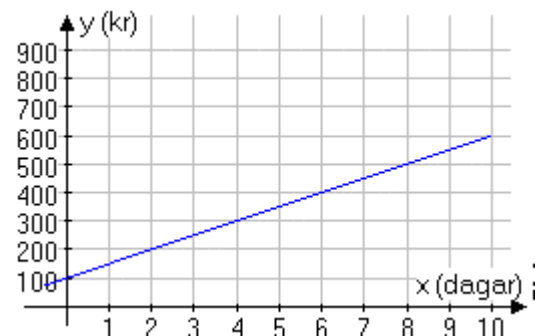
a) Hur många stjärnor har fig 10 ?

.....

b) Hur många stjärnor har fig n ?

.....

4. Diagrammet visar sambandet mellan kostnaden och antalet dagar då man hyr en cykel.



Skriv en formel för linjen.

.....

5. Förenkla uttrycken

a) $y + 3(4 + 3y) + 8$

.....

b) $10x + 3(4 - 3x) + 8$

.....

c) $10x - 3(4 - 3x) - 8$

.....

d) $(2x - 5)(3x + 4)$

.....

Del 2. Lösning lämnas. Skriv på provbladet.

6. Lös ekvationerna nedan

a) $(3x-8) + (x+3) = 10$

b) $3(20+y) - 2(5+2y) = 40$

c) $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2 = 96$

7. Förenkla uttrycken

a) $(3x-4)(5-3x) + (2x+3)(-4x+3)$

b) $4(3x-4)(5-3x) - 3(2x+3)(-4x+3)$

8. Givet ett tal. Öka talet med 5.

Multiplitera därefter summan med 3. Subtraherar du denna produkt från talet 100 blir resultatet 12. Vilket var det givna talet? Ställ upp och lös en ekvation.

Namn: _____