HÖGSKOLAN
KRISTIANSTAD

Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse IV

Per-Eskil Persson & Tomas Wennström
Klippans Gymnasieskola 2000

Innehållsförteckning

Förord

Detta är den fjärde i en serie rapporter, som presenterar resultat från en longitudinell undersökning av de NV-elever, som höstterminen 1998 påbörjade sina gymnasiestudier vid Klippans Gymnasieskola. Avsikten med studien är främst att undersöka hur elevernas algebraiska förmåga och förståelse utvecklas under gymnasietiden. Denna rapport beskriver läget efter två års gymnasiestudier. Dessutom görs en bedömning av hur eleverna lyckats med sina matematikstudier och hur detta relaterar till kunskaperna i algebra

Dessa studier har möjliggjorts dels genom ett generöst bidrag från Gudrun Malmers Stiftelse, dels genom anslag från Skolverket. De ingår som en del i ett projekt i matematikdidaktik, som i samarbete med Högskolan Kristianstad pågår i Klippans kommun. Vi vill också framföra ett stort tack till universitetslektor Barbro Grevholm, Högskolan Kristianstad för mycket hjälp, uppmuntran och konstruktiv kritik under arbetets gång.

Bakgrund

Höstterminen 1998 påbörjades en longitudinell undersökning av de elever (ca. 100 st. i 4 klasser), som då började i NV1 vid Klippans Gymnasieskola. Avsikten var att följa dessa elever under gymnasietiden och studera hur deras algebraiska förmåga och förståelse utvecklas. För att göra detta används bl.a. test, enkäter, intervjuer och observationer av eleverna. Resultat från undersökningen har presenterats i tre rapporter och en artikel i Nämnaren (Persson & Wennström, 1999, 2000a, 2000b och 2000c). För en diskussion om bakgrunden till undersökningen, använda metoder och hittills presenterade resultat hänvisas till detta material.

I den här rapporten kommer vi dels att analysera resultaten från ett test eleverna genomförde i slutet av NV2, dels att göra en utvärdering av hur eleverna lyckats med sina matematikstudier och i vilken utsträckning detta hänger ihop med algebraisk förmåga. Av speciellt intresse är att se vilka algebrakunskaper, som är ”stabila”. Med stabila menar vi i detta sammanhang kunskaper, som finns kvar, när det gått en längre tid sedan de behandlats.

Eleverna i undersökningen har läst Matematik A och B i NV1 och Matematik C och D i NV2. I kursplanen från 1994 ingår – i motsats till den nya kursplanen (Skolverket, 2000) - egentligen väldigt lite algebra (Skolverket, 1994):

Matematik A
kunna teckna, tolka och använda enkla algebraiska uttryck och formler samt kunna tillämpa detta vid praktisk problemlösning,
kunna lösa linjära ekvationer och enkla potensekvationer med för problemsituationen lämplig metod – numerisk, grafisk eller algebraisk.
kunna rita och tolka enkla grafer som beskriver vardagliga förlopp,
kunna ställa upp, tolka, använda och åskådliggöra linjära funktioner och enkla exponentialfunktioner som modeller för verkliga förlopp inom t.ex. privatekonomi, samhällsförhållanden och naturvetenskap,

Matematik B
i algebra
kunna lösa andragradsekvationer samt linjära olikheter och ekvationssystem med grafiska och algebraiska metoder.

i funktionslära
inse vad som kännetecknar en funktion samt kunna ställa upp, tolka och använda elementära funktioner och härvid utnyttja såväl numeriska som algebraiska och grafiska metoder.

Matematik C
i algebra och funktionslära
känna till hur dataprogram kan utnyttjas som hjälpmedel vid studier av matematiska modeller i olika tillämpade sammanhang.

Trots detta har vi behandlat väldigt mycket av den traditionella skolalgebran som ekvationer av första och andra graden, enkla ekvationssystem, förenklingar av polynom och rationella uttryck, enkla funktioner och deras grafer. Det mesta av algebrastoffet har behandlats i NV1. Rationella uttryck behandlades kortfattat i början av höstterminen i NV2, annars har eleverna inte sysslat specifikt med algebra under större delen av läsåret i NV2. Naturligtvis har de använt algebrakunskaper i olika sammanhang t.ex. för att lösa maximi- och minimiproblem, men någon systematisk träning har inte förekommit.

Elevernas inlärningssituation i NV2 har inte varit bra. Kursplanerna från 1994 innebär att eleverna på alltför kort tid möter en stor mängd nya begrepp inom bl.a. differential- och integralkalkyl och trigonometri. För de flesta elever är det en omöjlighet att smälta allt detta. Även om man, som vi gjort, prioriterar hårt, är situationen i stort sett orimlig (I den nya kursplanen har man tagit konsekvensen av detta och utökat tiden för både C- och D-kursen). De flesta elever lär sig lösa ett antal problemtyper, men de saknar troligtvis en djupare begreppsförståelse av mycket av den matematik, som behandlats i NV2. Mot bakgrund av detta är det naturligtvis då intressant att undersöka hur mycket av ”gamla” kunskaper i algebra, som finns kvar - är stabila. Det skulle kunna tänkas att allt nytt stoff ”stör” den kunskap man tillgodogjort sig tidigare. I det här sammanhanget kan det också finnas skäl att reflektera över om det är vettigt att ha den stora stoffmängd vi har. Det kan tänkas att ett mindre omfattande pensum på sikt leder till både bättre förståelse och förmåga i matematik. Här finns onekligen ett område för framtida forskning.

Således är en huvudfråga i den här rapporten hur pass stabila elevernas algebrakunskaper är. För att kunna svara på den frågan kommer vi att jämföra testet i slutet av NV2 med tidigare test, som vi haft vid skolstarten i både NV1 och NV2. Detta material kompletteras med de observationer och iakttagelser vi gjort under två år.

En fråga vi ställt i tidigare rapporter och kan besvara först nu är hur eleverna lyckats med sina matematikstudier. Vilket mått man skall ha på lyckas, kan naturligtvis diskuteras, men det enda någorlunda väldefinierade måttet är betygen. Betygskriterier kompletterade med nationella prov under några år har på ett rimligt sätt preciserat kraven för G och VG. Däremot är kraven för MVG fortfarande mycket dåligt definierade. Visserligen finns i den nya kursplanen kriterier för MVG, men innan de har exemplifierats på olika sätt, är de alltför abstrakta.

Även om inte alla elever är nöjda med betyget G får man nog ändå anse att man lyckats med sina matematikstudier om man är godkänd. Dessutom är G kravet för högskolebehörighet. Därför har vi som mått på om eleverna lyckats eller misslyckats med sina matematikstudier använt oss av betyget G. Den som har minst G på Matematik A - D har lyckats och den som är underkänd på någon kurs har misslyckats. Detta mått kan naturligtvis ifrågasättas, men är det bästa, som finns. Andelen godkända används också ofta i olika utvärderingar av skolan.

Resultat

Sammanställning och analys av sluttest i NV2

I slutet av läsåret genomfördes ytterligare ett algebratest i NV2. Detta bestod av totalt 18 uppgifter (se bilaga), varav uppgift 7 och 8 är öppna uppgifter, där ett par matematiska begrepp skall förklaras. Dessa båda uppgifter poängsattes inte och kommer att analyseras separat.

På uppgift 1a-4d (12 uppg.) skall endast svar lämnas. Helt rätt svar på en uppgift har gett 1 poäng. På uppgift 5a-c skall lösning lämnas. För att få 1 poäng på dessa tre uppgifter skall både lösning och svar vara korrekt. På uppgift 6 skall en ekvation förklaras. För att få en poäng på denna uppgift skall förklaringen vara någorlunda fullständig (se nedan). Detta innebär att man kan få totalt 16 poäng på testet.

77 elever av totalt 94 genomförde testet. Att bortfallet blev så här pass stort beror på att tidpunkten för testet visade sig vara något olycklig. Av organisatoriska skäl var vi tvungna att

genomföra detta de sista veckorna av vårterminen. Vi fick då kollisioner med vissa andra aktiviteter. Enligt vår bedömning påverkar inte bortfallet på nästan 20% slutsatserna nedan.

En annan mer allvarlig effekt av tidpunkten för testet var att många elever var trötta i slutet av läsåret och att detta medförde dålig motivation. Denna var betydligt bättre vid tidigare test och enkäter. Detta har troligtvis påverkat testresultaten negativt. Speciellt är detta märkbart på frågor av utredande karaktär.

Överhuvudtaget är det ett metodiskt problem vid undersökningar av det här slaget att inte belasta eleverna för mycket med test, enkäter och intervjuer. Gör man det är risken stor att resultaten blir mindre tillförlitliga. Eleverna orkar helt enkelt inte engagera sig tillräckligt. Under de två år, som vi hittills bedrivit denna undersökning, har våra elever i stort sett varit mycket samarbetsvilliga och bidragit till att materialinsamlingen kunnat genomföras på ett bra sätt.

För fullständighets skull presenterar vi i tabellen nedan en sammanställning av elevernas totalpoäng på testet.

Tabell poängfördelning

Poäng	<3	3-4	5-6	7-8	9-10	11-12	13-14	15-16	Tot
Andel (%)	1	9	13	17	18	26	14	1	100

Egentligen är inte denna poängfördelning av något större intresse utan det är analysen och diskussionen av de enskilda uppgifterna, som ger den intressanta informationen. Därför kommer vi att gå igenom testet uppgift för uppgift och kommentera resultaten. Lösningsfrekvens anges inom parentes. När så är lämpligt jämför vi med liknande uppgifter från de test, som genomfördes i början av höstterminen både i NV1 och NV2.

1. Lös ekvationerna nedan

a) $4x - 15 = 75 - x$ (74%)

b) $\frac{x}{5} - 6 = 14$ (86%)

c) $2^x + 1 = 17$ (81%)

d) $x^2 + 4x - 5 = 0$ (60%)

e) $\sin 2x = 1$, $0<x<\pi/2$ (36%)

f) $\lg x + \lg 2 = \lg 6$ (22%)

De felsvar, som förekommer på 1a, är troligtvis till största delen slarvfel. Svar som x=30, x=20 och x=12 beror på teckenfel och i det här fallet är det helt klart frågan om slarv. Våra elever vet hur man löser ekvationer av den här typen. På tidigare test har förekommit den något enklare ekvationen : $4x - 15 = 75$ (ht NV1 71%, ht NV2 86%) . Jämför man lösningsfrekvenserna vid de olika tillfällena och tar hänsyn till att ekvationerna inte har exakt samma svårighetsgrad kan man konstatera att kunskapen om denna typ av ekvationer är relativt stabil sedan högstadiet.

De flesta eleverna klarar av 1b utan problem. Om svaret x=76, som en del elever får, beror på slarv eller bristande förståelse för bråk och ekvationer är svårt att avgöra. Andra uppgifter på testet visar dock klart att många elever – kanske de flesta - har bristande förståelse för bråkräkning. Detta stämmer också med våra iakttagelser under läsåret. På tidigare test har förekommit ekvationen:

$\frac{x}{5} + 6 = 14$ (ht NV1 81%, ht NV2 85%). Även här kan man se att kunskapen om ekvationstypen är stabil.

Uppgift 1c visar att de flesta elever har klart för sig vad som menas med en lösning till en ekvation och att de kan hitta lösningar med prövning. Jämför vi med en uppgift på de tidigare testen $2^x - 1 = 7$ (ht NV1 51%, ht NV2 74%) ser vi att eleverna gjort framsteg. Vi har ju också under de här båda åren tränat ganska mycket på hitta lösningar till ekvationer med hjälp av grafritande räknare och har då diskuterat vad som menas med en lösning till en ekvation och hur man med prövning kan bestämma denna.

På uppgift 1d är lösningsfrekvensen otillfredsställande låg. Många elever (25%) nöjer sig med att svara med x=1 (prövning ?). En del gör smärre teckenfel. Vid testet i början av NV2 förekom andragradsekvationen $x^2 - 6x + 8 = 0$ med lösningsfrekvensen 79% .Troligtvis kan en hel del av eleverna som svarat x=1 lösa en andragradsekvation fullständigt, även om det var ett tag sedan de gjorde det. Möjligen kan bristande motivation också ha påverkat resultatet. Man har inte orkat.

Uppgift 1e med en lösningsfrekvens på 36% är ju inte speciellt bra. Men 23% som inte fått poäng har svarat 45^o och tar man med några som har svarat i radianer med period så klarar ändå ca 60% att lösa denna ekvation utan räknare och det är kanske inte så dåligt. Trigonometriska ekvationer är en svår del av D-kursen. Området var dock aktuellt vid testtillfället eftersom vi haft slutprov på D-kursen någon vecka innan.

Däremot var inte uppgift 1f alls aktuell, då testet genomfördes. Dessutom hade logaritmlagarna – på grund av tidsbrist – behandlats mycket översiktligt i C-kursen. Så när som vid lösningen av ekvationer av typen $a^x = b$ används logaritmer lite i C- och D-kursen. Således är det inte förvånande att endast 22% klarar uppgiften. 55% tror att lg a + lg b = lg(a+b) och får x=4. Resultatet på den här uppgiften visar att om vi vill ha bestående kunskaper och färdigheter behövs det ordentligt med tid både då ett område introduceras och för repetition.

Uppgift 2 och 3 testade förmågan att ställa upp ett algebraiskt uttryck. Uppgifter av den här typen förekommer bl.a. vid max- och minproblem i C-kursen.

2. I en rektangel är summan av längden och bredden 20 cm. Om längden är x cm, ställ upp en formel för arean A uttryckt i x. (65%)

3. I en rektangel betecknas längden med x och bredden med y. Arean är 100 cm^2 . Ställ upp en formel för omkretsen O uttryckt i x. (51%)

De flesta felsvar på uppgift 2 som $x{\cdot}(x - 20)$, $x{\cdot}20 - x$, $x{\cdot}(10 - x)$ är av typen skrivfel/lapsusfel. Uppgift 3 klaras bara av hälften av eleverna, vilket får anses otillfredsställande. Nästan 20% av eleverna ger ett uttryck i både x och y.

Uppgift 4 testar förmågan att skriva om enkla algebraiska uttryck.

4. Förenkla uttrycken

   a) $3(4 - 3x) + 4(3 - 4x)$ (82%)
   b) $3(4 + 3x) - 4(3 - 4x)$ (83%)

c) (2x - 5)(3x + 4) (77%)

d) $\frac{2x^2 - 8}{x - 2}$ (32%)

Om vi jämför 4a-c med liknande uppgifter från tidigare test
10x + 3(4 - 3x) + 8 (ht NV1 54%, ht NV2 88%),
10x - 3(4 - 3x) – 8 (ht NV1 42%, ht NV2 77%)
(2x - 5)(3x + 4) (ht NV1 19%, ht NV2 79%)
noterar vi först och främst att den förbättring i att skriva om algebraiska uttryck, som eleverna uppnått i NV1, verkar vara stabil. Detta stödjer den tes vi framfört i tidigare rapporter om att den väsentliga delen av förenklingsalgebran med fördel kan klaras av i åk 1 på gymnasiet.

De fel, som eleverna gör på dessa typer av uppgifter, är antingen slarvfel eller har sin grund i dålig talförståelse av negativa tal. Svar på 4a som 25x – 24, 24 + 25x, 24 + 7x osv. och –7x, 7x osv. på 4b tyder på en osäkerhet i hanteringen av minustecken. Denna osäkerhet beror utan tvekan på att eleverna inte riktigt förstått minustecknets olika roller. Mer förenklingsalgebra i grundskolan hade inte löst dessa problem.

På 4c förekommer förutom triviala slarvfel i några få fall allvarliga fel med svar som 6x – 20 och $6x^2$ – 20.

Det dåliga resultatet på 4d har definitivt sin grund i dålig talförståelse av rationella tal. Tidsbristen i kurs C och D gav endast litet utrymme för att reparera bristerna i bråkräkning. För många elever blir det då i stort sett meningslöst att arbeta med rationella uttryck eftersom man inte behärskar den grundläggande bråkräkningen. Felsvar som 2x – 4 (mest frekvent), $\frac{x^2 - 4}{x}$, $\frac{2x^2 - 4}{x}$ osv. visar helt klart detta.

På uppgift 5a-c skulle lösning lämnas. Endast helt korrekta lösningar med rätt svar har gett poäng. Genom att vi har tillgång till elevernas lösningar, kan vi mer i detalj diskutera olika feltyper.

5. Lös ekvationerna nedan
a) $4(x + 1)^2 – (2x – 1)^2 = 39$ (49%)
b) $\frac{4}{x-2} = \frac{2}{3}$ (61%)
c) $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ (8%)

Uppgift 5a kan jämföras med två uppgifter som förekom på ht-testet i NV2:
$(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2 = 96$ (68%)
4(3x-4)(5-3x) - 3(2x+3)(-4x+3) (35%)
Lösningsfrekvensen 49% kan sägas vara i paritet med den på dessa båda uppgifter. Förmågan att lösa uppgifter av den här typen är således en någorlunda stabil kunskap. Många fel som förekommer är klara slarvfel som att 12x + 3 = 39 blir 12x = 42 och att $4(x^2 + 2x +1) – (4x^2 – 4x + 1) = 39$ blir $4x^2 + 8x + 8 – 4x^2 + 4x –1$. En hel del smärre teckenfel förekommer också. Men de flesta elever vet hur man skall hantera uttryck av den här typen. Enstaka fall av allvarligare fel förekommer också som att man t.ex. får $16x^2 + 16 – (4x^2 + 1) = 39$ eller $(4x + 1)^2 – (2x – 1)^2 = 39$.

Resultatet på 5b är någorlunda tillfredsställande även om en hel del allvarliga fel förekommer som $x-2=\frac{2}{3}\cdot 4$, $x-2=\frac{2}{3}/4$.

Endast 8% av eleverna klarade av att lösa 5c helt korrekt. 16% hanterade det rationella uttrycket korrekt och kom fram till rätt andragradsekvation, men gjorde sedan diverse fel vid lösandet av denna. Flertalet elever klarar dock inte av att hantera det rationella uttrycket.

Några exempel på fel:

$x + 2 = 5x$, $2x + 1 = 5/2$, $x = \dfrac{5-1}{2-x}$ osv. En del elever (14%) får ett korrekt svar (x=2) genom prövning. Även om man inte löser ekvationen fullständigt är det dock positivt att man klart visar att man förstår vad en lösning till en ekvation är.

Både uppgift 5b och framför allt 5c visar att merparten elever har bristfälliga kunskaper i att hantera rationella uttryck. Ekvationer av denna typ kan enkelt lösas med grafiskt-numeriska metoder t.ex. som skärningen mellan två kurvor. Detta är en metod som kan användas på en mängd olika typer av ekvationer. Symbolhanterande räknare, som klarar algebran ovan, finns. Även om vi anser, att eleverna skall kunna klara ekvationer av den här typen manuellt, måste frågan ställas om det är vi, som är konservativa eller om det finns några goda sakskäl för att man i dag skall kunna lösa denna typ av ekvationer manuellt. Ändrar vi ekvationen lite till t.ex. $x^2 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2}$ måste vi använda grafiskt-numeriska metoder. Med ny teknik, som hela tiden ändrar förutsättningarna, måste vi i alla fall ständigt ifrågasätta innehållet i våra kurser.

Uppgift 6 gick ut på att eleverna skulle förklara vad en uppställd ekvation betyder.

6. Långsidan på en rektangulär gräsmatta är 25 meter längre än kortsidan. Förklara kortfattat vad ekvationen nedan kan betyda.

   2x + 2(x + 25) = 250 (57%)

För att få poäng på denna uppgift skulle man både ange att det gällde omkretsen och vad x var. Även de elever (27%) , som endast har angett att det handlar om omkretsen, har ju förstått vad ekvationen beskriver. Några få elever anser att uppgiften handlar om area. Resultatet på uppgiften får anses vara ganska tillfredsställande.

Analysen av testet kan sammanfattas på följande sätt:

- Lösning av vanliga ekvationer fungerar tillfredsställande. De flesta fel som förekommer är slarvfel.
- De flesta elever förstår vad en lösning till en ekvation är och kan genom prövning avgöra om ett viss tal är en lösning eller ej.
- Fullständig lösning av andragradsekvationen kunde gått bättre.
- Fel på enklare förenklingsalgebra beror i de flesta fall på dålig talförståelse av negativa tal – minustecknets olika roller.
- Merparten av eleverna behärskar grundläggande förenklingsalgebra.
- Kunskaperna om bråkräkning och hantering av rationella uttryck har stora brister.
- Förmågan att ställa upp och tolka algebraiska uttryck är relativt hyfsad, men borde förbättras.

Fråga 7 och 8

I dessa båda frågor, som vi inspirerats att ta med av Barbro Grevholms undersökningar av lärarkandidaters begreppsförståelses (Grevholm, in press), skulle eleverna förklara två matematiska begrepp – ekvation och funktion. Vi har i våra tidigare undersökningar sett att eleverna inte är speciellt bra på att uttrycka sig matematiskt i skrift (se t.ex. Persson & Wennström, 2000a, sid. 12). Därför är det inte speciellt förvånande att så är fallet även nu. Dessutom ägnar vi lite tid i skolan åt att diskutera och mer precist definiera olika begrepp, men detta skall kanske främst vara högskolans uppgift.

Resultatet på dessa båda frågor är således inte speciellt uppmuntrande. Eleverna har sysslat med ekvationer i ett antal år både i grundskolan och på gymnasiet, kan lösa ett antal olika ekvationstyper, men ingen kan på ett bra sätt förklara vad en ekvation är. Ett antal elever ger någorlunda hyfsade förklaringar till vad en funktion är, men de flestas förklaringar är inte bra. Kanske den bristande motivationen (se ovan) har spelat in. Dock är på det hela taget våra elevers svar bättre än lärarkandidaternas (Grevholm, muntlig kommunikation). Vi bifogar ett litet blandat urval elevsvar och lämnar ytterligare slutsatser till läsaren.

7. Förklara kortfattat vad som menas med en ekvation.
   (73 elever besvarade frågan)

   Två algebraiska uttryck som kan se olika ut men betyder samma sak. (pojke)

   En ekvation är en uträkning som innehåller x. Där inte alla talen är angivna och där du kan räkna ut x ex. x+2=5. (flicka)

   En likhet som innehåller minst en variabel. (flicka)

   En matematisk uppställning med variabler i. Ofta används de för att räkna ut variabeln. En ekvation skall alltid ha lika värden på var sin sida om =. (pojke)

   Innehåller x eller annan bokstav. Där man ska lösa ut tecknet eller förenkla ekvationen så att den blir lättöverskådlig. (pojke)

   En ekvation är uträkning där det fattas en eller flera siffror. Man har bytt ut dem bokstäver ex. x och y. (flicka)

   Ekvation så får man fram ett värde som man sedan ska kunna stoppa in i ekvationen och få fram svaret som står vid =-tecknet. (pojke)

   Det är när man har ett okänt tal och skall räkna ut det. Det måste finnas två led dvs. ett likamedtecken (=). Det får bara finnas ett okänt tal. (flicka)

   En ekvation är ett matematiskt uttryck som innehåller en obekant t.ex. x. Så är det meningen att man skall räkna ut ett värde på x. (flicka)

   En ekvation är ett tal som innehåller ett eller flera okända tal som vanligtvis betecknas med bokstäver. Det är de okända talen som skall räknas ut. (flicka)

   En ekvation är någon sorts formel, där man kan räkna ut det exakta värdet på x. (flicka)

En ekvation är någonting som är lika med något annat t.ex. 2x + 45 = 300. (pojke)

En ekvation är en uppställning av ett problem som går ut på att lösa ut ett okänt värde med hjälp av att ställa upp 2 saker som skall vara lika med varandra VL=HL. (pojke)

8. Förklara kortfattat vad som menas med en funktion.
(64 elever besvarade frågan)

Ett uttryck som ger dig ett svar beroende på en variabel som du anger. (pojke)

En omvandlare. Sätter in ett x, får ut ett annat (pojke)

I en funktion sätter jag in ett värde & får ut ett annat som en omvandlare (flicka)

x ändras t.ex. i proportion till y. (pojke)

En funktion är en kurva (graf), där man kan hitta t.ex. y_{max} , y_{min} *, räkna ut hastigheten på en ökning eller minskning eller läsa av olika värden direkt ur kurvan (pojke)*

En funktion är sådan att den ska fungera för alla x. Så att man kan få fram olika saker ur en graf t.ex. (pojke)

Man kan vid olika ”punkter” räkna ut ett ”värde”. (pojke)

En funktion är t.ex. f(x) = sin x + 3x/2. Då kan man sätta in olika värden på x och få fram olika lösningar till f(x) = y. Det kan vara t.ex. ett sätt att ta reda på dygnens längd vid olika dagar på året. (flicka)

f(x) = 2x + 3 är en funktion. En omvandlare. Du sätter in ett värde och får ut ett annat. (flicka)

En funktion är ett uttryck. Kan vara ett uttryck för ex. en graf eller en redan bestämd funktion för att räkna ut olika saker. (flicka)

Skickar med variabler, funktion räknas ut och ger tillbaka ett resultat. (pojke)

Funktioner beror av ett annat värde. Om man anger ett visst värde på x, får man en viss kurva. (pojke)

En funktion är en formel i vilken man stoppar in ett tal och får ut värdet funktionen av det talet. (pojke)

En funktion är en ekvation som kan ritas upp på en graf. Funktionen ger t.ex. en rät linje eller kurva. (flicka)

Ett uttryck där man kan stoppa in ett eller flera värden och få ut ett bestämt värde som svar (pojke).

En funktion är också en slags uppställning, men här sätter man in ett önskat värde och får ut ett svar på funktionen, t.ex. man sätter in en tid, sträcka m.m och får ut ett svar. Ofta handlar det om en funktion uppställd utifrån dagliga problem. (pojke)

En funktion är en ekvation där man stoppar in ett tal och får ut ett annat tal. (pojke)

En funktion är ett uttryck där man kan definiera ett y-värde för varje x-värde t.ex. y=x. (pojke)

Hur har studierna i matematik gått ?

Kriteriet (se ovan sid. 5) för att ha lyckats med sina matematikstudier är att ha uppnått betyget G på kurs A – D. Samtliga elever blev godkända på A-kursen. På B-kursen blev 1 elev icke godkänd, men så småningom tenterade han och fick G på kursen (se nedan). På C-kursen fick en elev IG och på D-kursen 8 st. Dessutom har ca 10 elever slutat sedan starten i NV1. I några fall beror det på studiesvårigheter – inte nödvändigtvis i matematik - men det finns även andra skäl till att man slutar t.ex. flyttning. Med vårt kriterium för att lyckas har då ca 90% gjort detta.

Eftersom ca 25% av våra elever har ganska svaga kunskaper i algebra (se tabellen på sid. 6), blir en slutsats att man faktiskt kan lyckas och bli godkänd på matematikkurserna upp t.o.m. D-kursen utan speciellt goda kunskaper i algebra. Egentligen är detta inte förvånande, eftersom det inte ingår speciellt mycket algebra enligt 1994 års kursplaner (se sid. 4). I de nya kursplanerna kommer detta att förändras. Speciellt ingår ganska mycket algebra i C-kursen (Skolverket, 2000):

kunna ställa upp, förenkla och använda uttryck med polynom samt beskriva och använda egenskaper hos några polynomfunktioner och potensfunktioner,
kunna ställa upp, förenkla och använda rationella uttryck samt lösa polynomekvationer av högre grad genom faktorisering,

Det kan kanske också i detta sammanhang vara av visst intresse att med några enskilda elever belysa att det är vanskligt att ge en tidig prognos om hur studierna skall gå. En pojke hade stora problem från början med matematiken i NV1. Han klarade inte B-kursen och kunde inte göra några av de algebraiska moment, som ingår i denna. Inledningen på C-kursen var också katastrofal och bedömningen var att det här kommer definitivt att gå illa. Men plötsligt vänder det och han klarar klart godkänt på slutprovet på C-kursen. Äntligen får han kraft att tentera av B-kursen och får G på denna. Han visar att han nu behärskar den algebra vi behandlat i NV1. På D-kursen går det inte så bra, men samtliga prov blir godkända och slutbetyget blir G. Det här exemplet visar att man inte skall ge upp. Ett lyckat resultat kan stärka självförtroendet och få det hela att vända. Detta är ett bra exempel på de affektiva faktorernas betydelse (se Persson & Wennström, 2000a och 2000b).

En elev, som omnämnts i en tidigare rapport som elev F (se Persson & Wennström, 2000b, sid. 9), har vi följt med speciellt intresse. Han uppvisade mycket stora brister i förkunskapstesterna vid starten av åk 1. Detta gällde i stort sett alla områden vi testade och i synnerhet i numerisk räkning och algebra. Hans taluppfattning var i grunden dålig och vissa delar av algebran hade han enligt egen utsago aldrig kommit i kontakt med. Trots att han fick delta i förstärkningskursen, där extra övning i numerisk räkning gavs, och trots att han var villig att lägga ner mycket arbete på att klara matematiken, gick det inte bra på hans första tester och prov. Han klarade exempelvis inte godkändgränsen på första provet på numerisk räkning. När vi kom till algebran hade vi två deltest på väg till provet. F klarade över huvud taget inte någon poäng på de testen. Frågan är då hur en sådan elev ska bedömas av läraren. Ska han rekommenderas att byta till ett annat program, där kraven på matematikkunskaper inte är så stora, och där man läser i en betydligt långsammare takt? Eller ska man istället försöka ge en sådan elev mer tid och kanske pröva andra metoder för att han ska få grepp om matematiken? I samtalen med F har han dock visat en positiv inställning till både matematik och naturvetenskap, och hans vilja att lägga ner extra arbete är det inget fel på.

F fick chansen att lyckas i matematik, och det visade sig att han tog den. Efter mycket övning fick han ett mycket svagt, men dock godkänt resultat på algebraprovet. Därefter har det gått stadigt uppåt. Efter mycket goda insatser i slutet av A-kursen, bl. a. på det nationella provet, fick han till och med ett svagt VG. På B-kursen, som ju innehåller mycket algebra, klarade han ett G med god marginal. När vi kom till C-kursen var han nära att få ett VG igen, men orkade inte riktigt ända fram. I det läget hade hans självförtroende vuxit så mycket, att han var uppriktigt besviken för att han "bara" fick ett starkt G. Slutligen klarade han, trots den stora tidsbristen i D-kursen, klart godkänt på denna. Provbanksprovet, som avslutade kursen, hade han godkänt på med bred marginal. Men dessa resultat hade han aldrig lyckats uppnå om han inte hade fått den positiva attityd han så småningom uppvisade eller om han inte hade slitit så mycket med matematiken som han gjorde. Vid utvecklingssamtalet i slutet av D-kursen förhörde han sig sedan noga om vad det innebar att läsa E-kursen, och beslutade sig efter moget övervägande att inte läsa den. Även om han troligen klarat den efter ännu en stor insats, var det kanske ändå ett klokt beslut. Frågan är ju hur det hade påverkat hans framtida inställning till matematik om han hade misslyckats på sin avslutande gymnasiekurs.

En annan pojke, som i rapporten ovan benämnts G hade goda resultat på förkunskapstesten, och det gick inte att i början av åk 1 förutsäga några svårigheter för honom i matematik. Prov och tester gick hyggligt och han klarade VG på A-kursen. Det var dock en väsentlig skillnad på hans sätt att arbeta jämfört med föregående exempel. Han uppvisade hela tiden en låt-gå-attityd vad gällde svårare uppgifter eller räknefärdigheter han ännu inte behärskade. Dessa "löste" han helst genom att hoppa över dem. Mot läraren uppvisade han en ytligt positiv inställning till matematiken men var egentligen inte så villig att lägga ner någon extra tid på det han från början inte klarade av. Det visade sig också på sikt att han inte tog till sig nya begrepp eller nya lösningsmetoder i den utsträckning han behövde för att komma igenom de vidare matematikstudierna på ett bra sätt. Han fick ett godkänt på B-kursen, men i C-kursen blev det värre. Det krävs en hel del möda för att tränga in i sådana begrepp som ändringskvot och derivata, och G ville inte lägga ner den mödan. Det höll på att gå riktigt galet. Han uteblev från ett par prov och fick göra kompletterande prov med dåliga resultat. Vid kursens slut hade han inte riktigt uppnått godkänt, och måste göra ett avslutande prov. Vid det laget var han riktigt pressad, och hade vid utvecklingssamtal fått veta hur illa han låg till. I detta läge tog han sig trots allt i kragen och arbetade igenom grundläggande uppgifter igen på ett sådant sätt, att han fick ett svagt godkänt betyg på kursen.

I D-kursen hade G:s attityd förändrats en hel del, och han började lägga ner en större arbetsinsats än tidigare på de många nya begrepp som kom inom trigonometri och integralkalkyl. Ett svagt godkänt på trigonometriprovet följdes av något bättre resultat, bl. a. på det avslutande provbanksprovet. Han fick ett svagt godkänt betyg på hela kursen. I nuläget har han påbörjat E-kursen och det är lite för tidigt att förutsäga hur han klarar sig där. Det finns ändå hopp om att det ska gå bra efter hans något förbättrade inställning till matematiken. Han har i grunden tämligen goda förutsättningar för bra resultat. Vad som behövs är viljan att arbeta mer och att han återigen får känslan av att lyckas efter det att hans självförtroende blivit så tilltufsat, som det blev i C-kursen.

Sammanfattning och slutsatser

Huvudfrågan i den här rapporten är hur pass stabila elevernas algebrakunskaper är. Av diskussionen ovan framgår ganska klart att de algebrakunskaper eleverna har med sig från NV1 i de flesta fall finns kvar i slutet av NV2 trots att de inte tränats speciellt under läsåret. Förenklingsalgebran med hantering av binom och polynom och tillhörande ekvationer är en relativt stabil kunskap. Vid starten i NV1 hade merparten av eleverna stora brister på dessa områden, men under första året i gymnasieskolan klarade de flesta elever av att få en rimlig färdighet i denna del av algebran. Detta stärker ytterligare den slutsats vi framfört i våra tidigare rapporter att gymnasieskolan kan klara av det mesta av den traditionella förenklingsalgebran. Detta är emellertid inte detsamma som att man inte alls skall syssla med algebra i grundskolan.

> *Tvärtom menar vi att man skall börja med algebra tidigt, men att man skall koncentrera på andra aspekter som variabelbegreppet och lära sig använda bokstäver i olika sammanhang gärna genom laborativt material av olika slag.*
> (Persson & Wennström, 2000c, sid. 16)

Det algebraavsnitt våra elever är dåliga på är förenklingar av rationella uttryck, men orsaken till detta är framförallt dålig talförståelse vad gäller rationella tal. Området behandlades i början av NV2 och med den korta tid som stod till förfogande hann vi inte reparera bristerna i bråkräkning. Därför blev, vilket framgår av testet ovan, avsnittet ganska meningslöst för de flesta av våra elever. Det är ytterligare ett exempel på att utan god talförståelse blir mycket av algebran meningslös och svårförstålig. Det är också ett exempel på att vi i matematikundervisningen alltför ofta skyndar vidare utan att ha försäkrat oss om eleverna har de nödvändiga förkunskaperna med dåligt resultat som följd.

Det kan också i detta sammanhang finnas anledning att fundera över vilka manuella färdigheter med rationella uttryck eleverna bör behärska (jfr. ovan sid. 9). Ny teknik förändrar hela tiden vilkoren för verksamheten och det finns en risk att vi av tradition anser viss kunskap som oundgänglig, även om så inte är fallet. Med algebran är det nog så att vi i dag bör förskjuta perspektivet från omskrivning till översättning. Räknare och datorer klarar alla de omskrivningar, som ingår i traditionella skolkurser i algebra. Däremot klarar de inte av att översätta från ett problem till ett algebraiskt uttryck. Vi bör definitivt ha en ständigt pågående debatt om vad som är viktig matematisk kunskap och varför.

> *For those who look to the structure and methods of mathematics as guides to school curricula, it is time for reconsideration of every assumption that underlies traditional curriculum structures. Of course, this fundamental change in mathematics wrought by emergence of electronic information-processing technology underscores another factor in curriculum design process – we plan curricula to prepare students for lives in a future world that will undoubtedly evolve through continual an rapid change. Our experience of the recent past suggests that we can hardly imagine what the future will hold, and this uncertainty itself must be a factor in the curriculum decision-making process.* (Fey, 1994, sid. 18)

I den här rapporten har vi också undersökt hur våra elever har lyckats med sina matematikstudier. Kriteriet, som vi använt, var att ha blivit godkänd på Matematik A-D. Med detta kriterium har merparten av våra elever lyckats med sina matematikstudier. Om de sedan är väl förberedda för högskolestudier i matematik är mer tveksamt. En anledning till att vi startade de här undersökningarna var högskolans klagomål för några år sedan på studenternas dåliga förkunskaper (se Persson & Wennström, 1999). Vår uppfattning i dag är att om ett godkänt resultat på Matematik D skall ge högskolebehörighet i matematik måste högskolan på ett helt annat sätt än tidigare möta eleverna där de är.

Våra studier av gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse börjar närma sig slutet. Vi har för avsikt att göra ytterligare ett test i NV3 i slutet av E-kursen. Eftersom det ingår en hel del algebra (komplexa tal) i denna kurs, är det av intresse att se hur den algebraiska förmågan är i slutet av gymnasietiden. Resultat från detta test och en sammanfattning av hela undersökningen planeras presenteras sommaren 2001.

Referenser:

Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla.* Nämnaren Tema, Göteborgs Universitet.

Fey, J. T. (1994). Eclectic Approaches to Elementarization. I R. Biehler et al (Eds) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Dordrecht: Kluwer

Grevholm, B. (in press). Teacher education in transition - the case of Sweden
Artikel presenterad vid Arbetsgrupp för aktion nr 7 vid ICME9, Tokyo

Persson, P. & Wennström, T. (1999). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse.* Rapport Högskolan Kristianstad.

Persson, P. & Wennström, T. (2000a). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse II.* Rapport Högskolan Kristianstad.

Persson, P. & Wennström, T. (2000b). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse III.* Rapport Högskolan Kristianstad.
(rapporterna kan beställas via e-post: wennstrom.tomas@telia.com)

Persson, P. & Wennström, T. (2000c). Algebraisk förmåga och förståelse. *Nämnaren 27(2),* 55-61

Skolverket (1994). *Kursplaner 94, Naturvetenskapsprogrammet*, GyVux 1994:14

Skolverket (2000). *Skolverkets föreskrifter om kursplaner och betygskriterier för kurser i ämnet matematik i gymnasieskolan,* SKOLFS 2000:5

Bilaga
Sluttest i algebra för NV2

***Hjälpmedel**: Formelsamling*

***Del 1.** Endast svar. Svara på provbladet.*

1. Lös ekvationerna nedan

   a) 4x - 15 = 75 – x ....

   b) $\frac{x}{5} - 6 = 14$ ....

   c) $2^x + 1 = 17$ ....

   d) $x^2 + 4x - 5 = 0$ ....

   e) sin 2x = 1 , 0<x<π/2 ....

   f) lg x + lg 2 = lg 6 ....

2. I en rektangel är summan av längden och bredden 20 cm. Om längden är x cm, ställ upp en formel för arean A uttryckt i x.

   ....

3. I en rektangel betecknas längden med x och bredden med y. Arean är $100\ \text{cm}^2$. Ställ upp en formel för omkretsen O uttryckt i x.

   ....

4. Förenkla uttrycken

   a) 3(4 - 3x) + 4(3 – 4x)
   ....

   b) 3(4 + 3x) - 4(3 – 4x)
   ....

   c) (2x - 5)(3x + 4)

   ....

   d) $\frac{2x^2 - 8}{x - 2}$ ....

***Del 2.** Lösning lämnas. Skriv på provbladet. Behöver du mer plats använd rutat papper.*

5. Lös ekvationerna nedan

   a) $4(x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 39$

   b) $\frac{4}{x-2} = \frac{2}{3}$

   c) $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

6. Långsidan på en rektangulär gräsmatta är 25 meter längre än kortsidan. Förklara kortfattat vad ekvationen nedan kan betyda.

   $2x + 2(x + 25) = 250$

7. Förklara kortfattat vad som menas med en ekvation.

8. Förklara kortfattat vad som menas med en funktion.