HØGSKULEN I VOLDA

Læringsmodeller i matematikk

Utviklingsoppgave

Andreas Christiansen

Praktiskpedagogisk utdanning
Høgskulen i Volda

Mai 2004

The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's must be beautiful*; the ideas, like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.*

(Hardy 1940)

Forord

Etter to praksisperioder ved PPU-studiet – ved en høgskole og en videregående skole – og to års yrkeserfaring med undervisning i lærerutdanningen har jeg oppdaget at studenter og elever har vansker med tilsynelatende banale matematiske problemer. Motivasjonen for å skrive denne oppgaven er et behov for å forstå hvorfor det er slik, og et behov for å kunne beskrive og måle disse problemene.

Jeg takke mine veiledere, førsteamanuensis Ole Einar Torkildsen og høgskolelektor Roy-Asle Andreassen, for gode råd og nødvendige korrigeringer underveis i skriveprosessen.

Andreas Christiansen
4. mai 2004

Innhold

Tabeller

1 Innledning

Statusen til matematisk kunnskap har opp igjennom historien vært fokus for mye debatt – eksisterer matematikken uavhengig av verden, eller er matematikken en menneskegjort konstruksjon. Descartes, og den kartesiske skole i det syttende århundret, hevdet at «matematikken er det eneste objektive syn på naturen». Matematikk var antatt å være basis til den induktive teori av vitenskapelige oppdagelser i den Aristoteliske tradisjon, hvor observerte objekter blir brutt ned i prinsipper, eller i de elementene som forårsaker prinsippene (Jaworski 1994: 19).

Jeg vil i denne oppgaven se på lærings- og forståelsesmodeller for matematikk. Etter å ha jobbet med lignende problemstillinger i tidligere rapporter i dette PPU-studiet føler jeg nå behov for å gjøre en mer teoretisk studie av emnet.

Egen erfaring fra en videregående skole og en diagnostisk prøve viser en del grunnleggende mangler i for eksempel algebra. Dette bekreftes og med NMR's undersøkelse (se kapittel 4.2 på side 11). Det er et betimelig spørsmål hvorfor det er blitt slik, og hvordan dette eventuelt kan måles og beskrives.

Jeg vil bruke van Hieles modell for geometri (se kapittel 3.4 på side 7) som utgangspunkt og se på muligheten for å generalisere denne modellen til å gjelde andre fagfelt innen matematikk – som for eksempel algebra, funksjonslære, etc. Følgende problemstilling er formulert:

> *Hvordan generalisere* van Hieles *læringsmodell for geometri til å gjelde matematikk generelt?*

Forskning på van Hieles modell har dreid seg om plangeometri, men Pierre van Hiele har drøftet nivåene i modellen i sammenheng med andre matematiske fagfelt som aritmetikk, algebra, funksjonslære og tredimensjonal geometri (Fuys et al. 1988: 187). Videre forskning kan avdekke lignende nivåer i forståelse av disse fagfeltene.

Jeg vil forsøke å gjøre en analyse på dette emnet basert på teori og forskningsresultater, samtidig som jeg vil trekke inn erfaringer fra egen praksis. Min formulerte problemstilling er vid, og jeg vil gjøre oppmerksom på at jeg bruker egen empiri og egne erfaringer som utgangspunkt for analysen. Til slutt vil trekke noen konklusjoner.

2 Metode

Der er naturlig nok blitt utført mye god og nyttig forskning rundt området forståelses- og tenkingsmodeller, både i matematikk og andre fag. Mye av forskningen går ut på å definere nivåer i slike modeller, og å karakterisere disse nivåene. Litteraturstudier er derfor et viktig og omfattende element i en oppgave hvor jeg vil forsøke å trenge litt ned i denne materien.

Norsk Matematikkråd vedtok i 1982 å gjennomføre en undersøkelse av grunnleggende kunnskaper i matematikk blant studenter som begynner på matematikkkrevende studier i Norge, og denne undersøkelsen har vært avholdt 10 ganger med ujevne mellomrom (Rasch-Halvorsen og Johnsbråten 2004). Oppgavene er hovedsakelig hentet fra ungdomsskolens pensum med unntak av noen få oppgaver som krever regneregler og definisjoner fra første års pensum i videregående skole. Resultatene fra undersøkelsen som ble gjennomført høsten 2003 er brukt til å belyse problemstillingen i denne oppgaven.

Våren 2004 var jeg i praksisperiode ved en videregående skole, hvor jeg blant annet underviste en klasse i kurset 2MX. Elevene er normalt 18 år når de tar dette kurset. Tema for hele praksisperioden var *derivasjon* og *integrasjon*. For å kunne identifisere og klassifisere de problemene elevene fikk i møte med derivasjon, fikk klassen en diagnostisk test – heretter kalt *derivasjonstesten* – bestående av ti oppgaver med varierende kompleksitet og vanskelighetsgrad (se kapittel 4.1 på side 10 og vedlegg A på side 24). En av elevene «saboterte» testen, og hans besvarelse er derfor ikke tatt med i resultatet.

SOLO-taksonomien er en generell beskrivelse av nivåer for kvalitativ vurdering av læring. Modellen beskriver fem strukturelle nivåer som elever går gjennom. Resultatene fra derivasjonstesten vil bli vurdert med hensyn på denne taksonomien.

3 Teori

3.1 Kunnskap og forståelse

Kunnskap kan vi se på som et reservoar som blir forsterket dersom vi bruker den, og som gradvis forsvinner dersom vi ikke bruker den. *Forståelse* kan ses på som aktivert kunnskap (Solvang 1992: 77ff).

Den sveitsiske erkjennelsesteoretikeren *Jean Piaget* (1896–1980) hadde som mål for sin forskning å finne fram til kunnskapens struktur (Imsen 2001). Piaget representerer kunnskapen ved noe han kaller *skjema*, og læring skjer enten ved en *assimilasjons*- eller en *akkomodasjons*-prosess. Et individs utvikling gjør altså at den grunnleggende skjemastrukturen endrer seg. Selv om utviklingen skjer kontinuerlig, skiller Piaget ut fire hovedperioder som har sine særpreg:

Den sensiomotoriske perioden (ca 0–2 år)
Etablering av objektforestillinger og objektpermanens.

Den preoperasjonelle perioden (ca 2–7 år)
Kognitive skjemaer etableres, og språk utvikles. Skjemaene for denne perioden har en konkret forankring, slik at en typisk respons fra et barn i denne perioden kan være at et smalt glass inneholder mer vann enn et bredt glass med nøyaktig den samme mengde vann.

Den konkretoperasjonelle perioden (ca 7–11 år)
Nye og grunnleggende skjemastrukturer som muliggjør en fullstendig logikk dannes. Begreper som mengde, vekt og volum kan vurderes uavhengig av ytre form, og geometriske egenskaper kan vurderes uavhengig av hverandre. Egenskaper og begreper kan systematiseres hierarkisk.

Den formaloperasjonelle perioden (fra ca 11 år)
Nye skjemastrukturer står på egne bein uavhengig av støtte i konkreter, og ideer trenger heller ikke ha støtte i virkelighetens verden. Denne perioden muliggjør vitenskapelig tenkning.

Tabell 1: Piagets nivåer for kognitiv utvikling

Aldersintervallene Piaget satte ved stadiene er selvsagt svært individuelle. Et skjema består av tankemessige operasjoner eller handlinger. En elev har for eksempel forskjellige skjema for kunnskap i algebra og geometri, og karakteristisk for disse skjemaene er at de kan operere sammen. En lærer må i møtet med elevene være oppmerksom på at alle elvene har forskjellige skjemaer til å møte undervisningen med. En assimilasjonprosess skjer ved at *en utfordring tilpasses et allerede eksisterende skjema*, sagt med andre ord at en forsøker å tilpasse omgivelsene til en selv, mens en akkomodasjonsprosess skjer ved at *et eksisterende skjema bygges om, utvides og tilpasses den gitte utfordring* eller at en forsøker å tilpasse seg seg selv til omgivelsene. Med disse definisjoner kan vi si at å forstå noe er å kunne assimilere det inn i eksisterende skjemaer (Solvang 1992: 78ff).

Ikke alle teorier fra Piaget er blitt sett på som like fordelaktige. Eleven blir i stor grad kun vurdert som et «individ», og ikke som en «sosial deltaker». Videre blir det hevdet at Piaget ignorerte sosiale og kontekstuelle implikasjoner ved barns tenking. Hans teori om at

> *hver gang en lærer et barn noe for tidlig, noe som barnet kunne ha funnet ut selv, blir barnet fratatt muligheten til å gjøre denne oppdagelsen, og derav muligheten til fullt ut å forstå tingen*

representerer et negativt syn på læring, og har blitt tilbakevist av andre psykologiske skoler (Jaworski 1994: 15).

Piaget skiller mellom *figurativ* og *operasjonell* kunnskap. Figurativ kunnskap betyr at en elev har utviklet et skjema hvor bare kunnskapens ytre trekk er med, for eksempel at man har pugget en formel uten å forstå hvorfor formelen er slik den er. Piaget definerer en operasjon som en handling med fire egenskaper:

- Handlingen må være reversibel.
- Handlingen må kunne settes sammen med andre.
- Handlingen må være en del av en helhetsforståelse.
- Handlingen må kunne internaliseres.

Operasjonell kunnskap betyr at en elev har utviklet skjemaer som består av operasjoner som har disse fire egenskaper. Erfaringsmessig viser det seg at mange elever dessverre ikke har operasjonelle kunnskaper på så mange felt, og derfor må pugge formler og beviser. Tilsvarende kan vi si at en elev har *instrumentell forståelse* dersom eleven møter en utfordring med konkretiseringer, og at en elev har *relasjonsforståelse* dersom eleven kan forklare sammenhengen mellom premissene i utfordringen og den endelige løsningen (Solvang 1992: 89ff). Jeg vil i kapittel 5 analysere derivasjonstesten på bakgrunn av denne teori, og vurdere hva elevene har av instrumentell og operasjonell forståelse.

Dersom en elev er i stand til å mestre en utfordring, så har denne eleven en løsningsmetode, eller en *algoritme*, som er en framgangsmåte som ved et endelig antall operasjoner fører til løsning. Dersom eleven *ikke* mestrer utfordringen, så har denne eleven et problem som består i at vedkommende ikke har noen algoritme som kunne gitt løsning på utfordringen. En problemløsning er altså en søken etter metoder som fører til løsning av problemet (Solvang 1992: 134ff).

3.2 Språk og sosiokulturelle forhold

Den russiske pedagogen *Lev S. Vygotsky* (1986–1934) hevdet at «det unike ved mennesket må forstås ut fra menneskets historiske karakter». Menneskets arbeid og oppførsel formes ut fra erfaringene gjort av tidligere generasjoner, og videreført ned gjennom slektsleddene. I tillegg til denne historiske dimensjonen, framhevet også Vygotsky en sosial dimensjon, og dette sosiale aspektet gjør mennesket i stand til å nyttiggjøre seg, og ta opp i seg det enorme forrådet av andres erfaringer. Individets psykologiske utvikling avhenger derfor av den historiske tidsepoke individet befinner seg i. Vygotsky studerte utviklingen og oppbyggingen av høyere former for hukommelse, oppmerksomhet, beslutning, tenkning og begrepsdanning. I sammenheng med disse prosessene undersøkte han hvordan barn tilegner seg bruk av tegn og symboler som psykologiske redskaper, og hvordan disse tegn og symboler bidrar til at de psykologiske prosesser reorganiseres i løpet av utviklingen. I tillegg var Vygotsky opptatt av forholdet mellom tenkning og språk. Et barn utvikler sin tenkning i begreper på grunnlag av tenkemåter som virker begrepsmessige for andre, og som sanksjoneres av den, men som barnet ikke selv forstår slik. Dermed dannes barnets begrepstenkning under ytre påvirkning, og kan betraktes som en sosial konstruksjon. Tenkning realiseres gjennom den indre talens ordmeninger – hvor tenkning og språk forenes i det verbalt meningsfulle. Vygotsky skilte mellom to slags ordmeninger – mening og betydning. *Mening* viser til den stabile, leksikalske definisjon av et ord, mens *betydning* viser til en mer subjektiv, foranderlig og situasjonsavhengig oppfatning av ordets innhold. For Vygotsky var undervisningen selve konsentratet av den sosiokulturelle aktivitet som var ansvarlig for utviklingen av høyere psykologiske prosesser (Bråten 1996: 21ff).

Hos Vygotsky finner vi òg de to gjensidig utelukkende begrepene *akademiske begreper* og *spontane begreper*, førstnevnte omtales og gjerne som *vitenskapelige* eller *faglige begreper*. Skillet mellom disse begrepene finner man igjen i de språktypene som kalles samtalespråk og akademisk språk (Øzerk 1996: 103ff). Den tyske filosofen Ludwig Witgenstein snakket i tillegg om to typer kunnskap – på den ene siden hadde man den *utsigelige*, eller formulerte, som lå innenfor språkets grenser, og på den andre hadde man den *usigelige*, eller underforståtte, som lå utenfor språkets grenser (Imsen 2002).

Matematikkens kultur er i seg selv en betydningsfull faktor i et klasserom. Den innebærer måter å utføre matematiske oppgaver på, og inneholder matematiske objekter, begreper og verktøy. En lærers oppgave er å skape de rette forutsetningene for at denne kulturen kan få utfolde seg. Teorien om Vygotskys proksimale utviklingssone (se Imsen 2001: 159) er ofte brukt til å beskrive elev/lærer interaksjon, men kan òg ses på som en måte å beskrive en elevs tilpasning til den matematiske kultur etter hvert som vedkommende elev utvikler forståelse for de matematiske objektene, begrepene og verktøyene, med hjelp fra læreren. Teoretikere som har videreutviklet Vygotskys perspektiver snakker om læring som kulturtilpasning (Jaworski 1994: 210).

3.3 Undervisningsprinsipper

Ifølge Piaget er den viktigste oppgaven til matematikkundervisning å fylle gapet mellom naturlig, ureflektert tenkning i et usikkert virkeområde, og bevisst, reflekterende tenkning i strukturer i det samme virkeområdet (Treffers 1987: 277).

Solvang (1992: 49–50) lister opp noen undervisningsprinsipper, som velges ut fra det aktuelle lærestoffet og lærerens kjennskap til elevene:

- motivasjon
- progresjon
- differensiering
- fra det enkle til det sammensatte
- fra det spesielle til det generelle
- presisjonsnivåer i undervisningen
- representasjonsformer for lærestoffet

Den heuristiske undervisningsmetode er en mye brukt metode i den norske skole. Metoden består i at læreren driver undervisningen framover ved hjelp av ledespørsmål og kontrollspørsmål, og på den måten leder elevene til selv å oppdage løsningene og konklusjonene. Ideelt burde metoden vært brukt slik at den gjennom spørsmål ledet elevene fram til selv å oppdage *problemene*. Bruken av denne metoden gjør at vi som lærere kommer elevene nær innpå livet, og gjør oss i stand til å anta at en elev har forstått det aktuelle lærestoffet (Solvang 1992: 55).

Der er beskrevet to prosesser som aktiviseres dersom undervisningens faglige innhold skal gjøres tilgjengelig – *input* og *inntak* (Øzerk 1996: 107ff). Begrepet input refererer til den totale mengde av undervisning som eleven hører, eller blir konfrontert med av lærer eller medelever. Det som eleven forstår, og tilegner seg, kalles inntaket.

Et av «moteordene» i dagens politiske skolesituasjon er *ansvar for egen læring*. Det er selvfølgelig at læring innebærer et visst ansvar fra elevens side, men det vil virke mot sin hensikt å ikke gi den nødvendige hjelp til elever når de trenger det. Undervisning er en lærings- og utviklingsfremmende virksomhet som skal hjelpe elevene med å lære noe nytt, og det skal være en viss avstand mellom vanskenivået i det nye lærestoffet, og elevenes allerede har forstått faglig. Avstanden må være passe stor slik at det nye lærestoffet virker som en oppnåelig utfordring (Øzerk 1996: 112ff). Prinsippet om ansvar for egen læring forutsetter dessuten at elevene har kunnskap om læreprosessene, og kunnskap om hvor fagets kilder finnes, og hvordan de kan benyttes (Imsen 2002).

David Wood, Jerome Bruner og Gail Ross lanserte i 1976 et prinsipp som på engelsk omtales som «scaffolding principle» (Wood et al. 1976), og som gjerne oversettes til *stillasprinsippet* på norsk. Prinsippet sammenlignes med den prosessen det er å sette opp et stillas, i den forstand at undervisningen lager situasjoner hvor elevene lett kan komme i gang med læring. Læreren kan så trekke seg tilbake etter hvert som eleven mestrer situasjonen. Metoden for undervisningen blir å tilby eleven den assistanse vedkommende trenger, og det er viktig at eleven har forståelse for de problemer han eller hun skal løse uten assistanse. Barbara Rogoff oppsummerer de seks kjennetegn på undervisning som følger stillasprinsippet (her sitert etter Bråten og Thurmann-Moe 1996: 132):

1. Vekking av elevens interesse for oppgaven.
2. Forenkling av oppgaven slik at eleven mestrer deler av den.
3. Motivasjon og styring av aktivitet.
4. Markering av elevens avvik fra den ideelle løsning.
5. Kontroll av frustrasjon og risiko.
6. Demonstrasjon av en ideell utgave av oppgaven.

Læreren har mesteparten av kontrollen innledningsvis, men denne kontrollen vil gradvis bli overført til eleven etter hvert som elevens kunnskap øket.

3.4 van Hiele-teori

Det nederlandske ekteparet *Pierre van Hiele* og *Dieke van Hiele-Geldorf* utviklet på 1950-tallet en teori for et individs utvikling i geometri. De deler utviklingen inn i fem nivåer, nummerert fra 0 til 4, og disse nivåene er kort fortalt (Fuys et al. 1988 og Mason 1998):

0 – Gjenkjenning. Figurer kjennes igjen som en helhet uten tanke på hva de er sammensatt av. Relevante attributter ignoreres, mens irrelevante attributter gjerne overvektlegges. Eleven gjenkjenner, navngir, sammenligner og operer på geometriske figurer i henhold til deres utseende.

1 – Analyse. Nå fokuseres mer på figurens egenskaper. Relevante egenskaper forstås, og skilles fra irrelevante. Figurer samles i klasser, men det oppdages ikke ennå at en figur kan tilhøre flere klasser. Eleven analyserer figurer i henhold til termer fra figurens komponenter, og gjør empiriske oppdagelser av egenskaper og regler.

2 – Ordning. Nå gjøres slutninger basert på observasjoner gjort i nivå 1. Abstrakte forhold mellom figurer forstås, men teoremer oppfattes intuitive, og bevis er derfor unødvendige. Tidligere egenskaper og regler følges uformelt.

3 – Deduksjon. Ideen med aksiomer, definisjoner, hypoteser og konsekvenser fattes, og beviser forstås. Eleven beviser teoremer deduktivt og etablerer sammenhenger mellom nettverk av teoremer.

4 – Aksiomatisering. Studiet i geometri har nå kommet opp på et høyere abstrakt nivå og det er ikke lenger nødvendig med konkrete og billedlige modeller. Vi snakker her om høgskole- og universitetsnivå. Teoremer etableres i ulike aksiomatiske system, og disse systemene analyseres og sammenlignes.

Tabell 2: van Hieles nivåer for utvikling i geometri

Modellen gir *ikke* en deterministisk oversikt over en prosess, men er en empirisk beskrivelse av relativt stabile nivåer (Schoenfeld, her sitert etter Murray 1997). En elev må normalt gjennom et nivå av forståelse i van Hieles modell før det neste kan oppnås, og der er beskrevet fem faser for hvert nivå (Fuys et al. 1988: 7):

Informasjon: Eleven gjør seg kjent med nivåets domene.

Ledet orientering: Eleven gjør oppgaver innenfor de sammenhenger som skal læres.

Tolking: Eleven blir oppmerksom på sammenhengene, og prøver å uttrykke dem med fagtermer.

Egen orientering: Eleven finner egne sammenhenger gjennom å løse mer kompliserte oppgaver.

Integrasjon: Eleven sammenfatter lærdommen, reflekterer over egne handlinger og får en oversikt over de tilgjengelige sammenhenger.

De fem nivåene i van Hieles modell er sekvensielle, og hvert nivå har sitt eget språk og sin egen begrepsmengde. Overgangen fra et nivå til det neste er mer et resultat av undervisning og egen erfaring, enn av alder og modning. Dersom en elev undervises i stoff som ligger i et for høyt nivå, vil dette ikke bli forstått, og ikke føre til avansement i nivå (Fuys et al. 1988: 8).

3.5 SOLO taksonomi

De australske pedagogene John Biggs og Kevin Collis har beskrevet en taksonomi som karakteriserer ulike nivåer i en målrettet, kvalitativ vurdering av læring (Biggs og Collis 1982). Taksonomien kalles *SOLO*, som er en forkortelse for *Structure of the Observed Learning Outcome*.

Prestrukturelt nivå. Elevene oppfatter deler av usammenhengende informasjon. Der er ingen organisasjon og oversikt. Når svært sjelden noen konklusjon.

Unistrukturelt nivå. Elevene viser enkle og opplagte sammenhenger, men betydningen av sammenhengene vises ikke. Når sjelden noen konklusjon, og denne er i så fall forhastet og basert på lite informasjon.

Multistrukturelt nivå. Elevene viser en del sammenhenger, men forbindelser mellom sammenhengene vises ikke. Når enkle konklusjoner.

Relasjonsnivå. Elevene viser forbindelser mellom sammenhenger, og viser forbindelser mellom sammenhenger og helheten. Når konklusjoner som er konsistente med tilgjengelige data.

Utvidet abstrakt nivå. Elevene viser sammenhenger utover det umiddelbare faglige området. De generaliserer og overfører prinsipper fra det spesifikke til det generelle. Føler ikke behov for nødvendigvis å komme med en bastant konklusjon, men kan foreslå eller rettferdiggjøre flere mulige utfall.

Tabell 3: SOLO TAKSONOMI

Der kan se ut til å være en forbindelse mellom denne modellen og Piagets nivåer for kognitiv utvikling (se tabell 1 på side 3). Dette vil jeg imidlertid se nærmere på i kapittel 5.

Videre kan man trekke relasjoner mellom denne taksonomien og Benjamin Blooms taksonomi for det kognitive området, nærmere beskrevet i *Fagdidaktisk oppgave* i denne vurderingsmappe (Christiansen 2004).

4 Erfaringer

4.1 Derivasjonstesten

Nedenstående test ble gitt til en klasse 18 år gamle elever som tok kurset 2MX. Besvarelsene ble gitt 2 poeng for riktig svar, 0 poeng for feil svar og 1 poeng for nesten riktig svar eller «riktig tankegang». Elevene fikk 20 minutter på testen og ingen hjelpemidler var tillatt brukt, heller ikke kalkulator. Oppgavene er fri for språk som måtte transformeres til matematisk kode før man kunne forstå problemet. Elevene trengte kun å bestemme seg for en løsningsstrategi, og gjennomføre denne.

DERIVER FYLGJANDE FUNKSJONAR

$$
\begin{array}{lll}
(1) \quad f(x) & = & 2x^3 + 4x \\
(2) \quad f(x) & = & 3x^4 + 7x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 8x \\
(3) \quad f(x) & = & \left(x^2 - 4x\right)^3 \\
(4) \quad f(x) & = & 2x^2 + \ln x \\
(5) \quad f(x) & = & 2x^2 + 5e^x \\
(6) \quad f(x) & = & 2\sqrt{x} \\
(7) \quad f(x) & = & 3x^{0,7} + e^{2x^2} \\
(8) \quad f(x) & = & 2x \cdot e^{2x} \\
(9) \quad f(x) & = & (x+3)(x-3) \\
(10) \quad f(x) & = & \dfrac{(x+3)}{(x-3)}
\end{array}
$$

Dersom vi klassifiser de enkelte oppgavene etter hvilke derivasjonsregler som skulle brukes får vi denne oversikten:

Potensregel: Oppgave 1–5, 7 (eventuelt oppgave 6)
Kjerneregel: Oppgave 3, 7, 8
Produktregel: Oppgave 8, 9
Kvotientregel: Oppgave 10

I tillegg til disse reglene måtte elevene ha kunnskap om hvordan man deriverer eksponential- og logaritmefunksjoner for å kunne løse oppgavene 4, 5 og 8. Oppgave 6 kunne man enten løse med å bruke en egen regel for rotuttrykk, eller man kunne omforme funksjonen slik at potensregelen kunne brukes. Regelen for derivasjon av røtter kan være vanskelig å huske, og dersom man omformer uttrykket til et potensuttrykk vil potensen bli en brøk, som nok er grunnen til at denne oppgaven voldte en del problemer. Ved å studere resultatet av testen i vedlegg A på side 24 ser man imidlertid at bruk av potensregelen volder få problemer. Oppgavene 1 og 2 løses ved kun å bruke potensregelen, og her var det kun en elev som ikke klarte oppgavene. Feilen denne eleven gjorde var å se på addendene som faktorer og blandet inn produktregelen.

Kun to av oppgavene fikk mindre enn 1,0 i middelverdi, nemlig 3 og 8. Oppgave 3 er en blanding av kjerne- og potensregel, og den vanligste feilen var at elevene glemte å derivere kjernen. Den mest sammensatte oppgaven var utvilsomt oppgave 8 hvor man måtte kombinere kjerneregel og produktregel, her hadde kun én elev korrekt svar, mens én hadde halvveis rett. I oppgave 7 måtte elevene kombinere potensregel og kjerneregel, og den gikk bemerkelsesverdig bedre. Det viser seg at en del elever har problemer med å kunne identifisere et produkt i et algebraisk uttrykk.

I oppgavene 9 og 10 skulle produkt og kvotientregelen benyttes, men her ikke i kombinasjon med andre regler. Disse oppgavene fikk henholdsvis 1,8 og 1,2 i middelverdi, og de fleste feilene i oppgave 10 gikk på at elevene ikke husket kvotientregelen, da denne er mer komplisert enn produktregelen.

I tiden etter testen jobbet elevene videre med oppgaver i derivasjon. Med en del innsats klarte alle å tilegne seg bruken av reglene, men noen klarte ikke på egen hånd å se når man måtte bruke flere regler sammen.

4.2 Norsk Matematikkråds undersøkelse

Norsk Matematikkråds undersøkelse gir et bilde av grunnleggende kunnskaper i matematikk blant de studenter som begynte på matematikkrevende studier ved norske høgskoler og universiteter høsten 2003. I årets undersøkelse er gjennomført ut fra parametrene valg av utdanningsvei, bakgrunn fra videregående skole, kjønn og alder (Rasch-Halvorsen og Johnsbråten 2004). Oppgavene i undersøkelsen er stort sett hentet fra grunnskolens pensum, og det er et krav at alle oppgavene skal løses uten bruk av kalkulator. Resultatene fra årene 1984–2003 viser følgende utvikling:

År	**1984**	**1986**	**1988**	**1991**	**1999**	**2000**	**2001**	**2003**
Rett svar %	72,8	71,8	70,5	70,4	60,3	59,6	52,2	49,1

Tabell 4: Utviklingen av rette svar i NMR's undersøkelse

Dersom en ser på lærerstudentene isolert, har utviklingen i korrekte svar gått fra 50,8% i 1984 til 31,7% i 2003. Det har imidlertid vært en framgang fra 2001 hvor resultatet var 29,5%. Dette kan bety at trenden har snudd for denne gruppen, men på den annen side er lærerstudentene den gruppe som har det svakeste grunnlag når de starter matematikkstudiet. En av oppgavene gikk ut på å dividere to desimaltall $\frac{0,006}{1,5}$. Denne oppgaven klarte bare drøyt 20% av lærerstudentene, mens snaue 50% av dem som skulle begynne ved det mest teoretiske kurset på universitetet klarte oppgaven.

Resultatet fra 2003 sett på bakgrunn av studentenes bakgrunn fra videregående skole viser at de med ett år matematikk fra videregående skole fikk 30,6% rett, de med to år fikk 43,9% og de med tre år fikk 58,8% rett. Forskjellen mellom ett og to år er overraskende nok større enn forskjellen mellom to og tre år med matematikk fra videregående skole.

Årets undersøkelse viser at kvinner får betydelig lavere resultat enn menn uansett bakgrunn, alder og valg av studieretning. Dette er et interessant resultat sett på bakgrunn av evalueringen av Reform 97 (Haug 2003: 74) hvor det påvises at jenter presterer i gjennomsnitt en halv karakter bedre enn gutter målt i eksamenskarakterer. Jentene dominerer den øvre halvdel mens guttene dominerer den nedre. Evalueringsrapporten hevder at tekstkulturen i grunnskolen favoriserer jentene framfor guttene ved at temaene i oppgaver har særlig relevans for jenter. Grunnen til at kvinner får dårligere resultat enn menn i NMR's undersøkelse kan forklares med bakgrunn fra videregående skole hvor kvinner er overrepresentert blant dem som velger bort matematikk ved første mulige anledning, og har derfor kun ett år fra videregående skole når de begynner på høyere studium (Rasch-Halvorsen og Johnsbråten 2004: 45).

Undersøkelsen konkluderer med at

> *Resultatene indikerer vesentlige brister innen deler av grunnleggende matematikk for store og viktige grupper innen utdanningssystemet. Også de faglig sterkeste elevene har fått lavere resultat i den siste undersøkelsen enn de tidligere.*
>
> *Antall år med matematikk fra videregående skole har svært stor betydning for hvordan studentene behersker grunnleggende matematikk.*
>
> *Kvinner får betydelig lavere resultat enn menn, og sammenlignet med tidligere undersøkelser er forskjellen økende.*
>
> *Det gir grunn til uro når en ser at studenter som starter på de mest matematikkrevende studier ikke har kontroll over grunnleggende pensum.*

Relevante problemstillinger som kan forklare de stadig synkende resultater kan være

> *Hvilken betydning har utstrakt bruk av kalkulator for hvordan elever/studenter behersker grunnleggende kunnskap i matematikk?*
>
> *Hvor sentral er algoritmisk kunnskap?*
>
> *Kan matematikk som fag leve med at evnene til å bruke faget som et redskap for å løse matematiske problemer hele tiden svekkes?*
>
> *Legges det for lite vekt på forståelse og strategitenkning i matematikk i skoleverket?*

5 Drøfting

I sin bok *Investigating Mathematics Teaching: A Constructivist Enquiry* kritiserer Barbara Jaworski Jerome Bruners såkalte «discovery learning» (Jaworski 1994: 11ff). Modellen kritiseres, på den ene siden fordi det forventes at elever skal selv oppdage teorier som det har tatt århundrer utvikle, og på den andre siden fordi det kanskje ikke er snakk om oppdagelser i det hele tatt, men snarer en «leding» fram mot de resultater som er ønsket av læreren. E. Love (her sitert etter Jaworski 1994: 12) foreslår at elever trenger å få delta i aktiviteter som:

- Identifisere og uttrykke egne problemer for utforskning.
- Uttrykke egne ideer og utvikle den i problemløsinger.
- Teste egne ideer og hypoteser mot relevant erfaring.
- Rasjonelt forsvare egne ideer og konklusjoner, samt å få anledning til å kritisere andres ideer.

En analyse av det faglige innholdet i kunnskap som en lærer skal formidle kan bestå av følgende punkter (Solvang 1992: 100):

1. Begreper, prinsipper og teoremer
2. Relasjoner mellom disse momentene
3. Slutninger som kan trekkes av disse relasjonene
4. Avgrensinger som de foregående punkter forutsetter

Den undervisning i klasse 2MX som var forut for derivasjonstesten var innføring i funksjonslære. Begrepet *derivasjon* var helt ukjent for samtlige elever, slik at i begynnelsen var elevens input adskillig større enn inntaket. Det var derfor vanskelig å gi elevene for stort ansvar for egen læring, siden avstanden mellom elevenes faglige basis og det nye lærestoffet var for stort.

Ved å følge de seks punktene som kjennetegner undervisningsprinsippet *stillasbygging* (se kapittel 3.3) forsøkte jeg å forenkle oppgavene slik at elevene følte mestring, og dermed ble mer motiverte. En typisk undervisningstime var delt mellom tavleundervisning og egenaktiviteter, men tavleundervisningen ble drevet framover med kontrollspørsmål fra min side. Dette samme heuristiske prinsippet ble brukt under egenaktivitetene hvor jeg vandret rundt og samtalte med elevene, enten enkeltvis eller i grupper.

Evaluering av en elevs kunnskaper kan gjøres *formativt* eller *summativt*. En formativ vurdering vil si at en vurderer alt som skjer under læringsprosessen, mens en summativ vurdering bare konsentrerer seg om det eleven har lært ved undervisningens avslutning (Imsen 2002). Formålet med derivasjonstesten som ble gitt til klasse 2MX var å måle elevenes kunnskaper i emnet derivasjon på et gitt tidspunkt, slik at min vurdering av besvarelsene var derfor rent summativ.

Ser man på oppgavene 1, 2, 4, 5, 9 og 10, så er løsningsstrategien enkel å bestemme – elevene har kun bruk for én regel, og den er lett identifiserbar. Dersom man husker algoritmen for løsningen trenger elevene ikke å besitte mer enn instrumentell forståelse i derivasjonsteknikker. De andre fire oppgavene er løsningsstrategien enten sammensatt av flere algoritmer, eller regelen som skal benyttes er vanskelig å identifisere, og det krever derfor operasjonell forståelse for å løse disse oppgavene. Det har gjennom egen undervisningen vist seg at elever som mangler operasjonell forståelse i algebra, har problemer med å identifisere et algebraisk uttrykk hvor for eksempel produktregelen skal brukes. Noen skiller mellom uttrykkene $(3x^2)'$ og $(3 \cdot x^2)'$, og prøver å bruke produktregelen når de skal derivere det andre av disse to. Likeledes kan de skille mellom $(3x \ln x)'$ og $(3x \cdot \ln x)'$, og bare bruke produktregelen på det siste. Disse elevene viser en instrumentell forståelse siden de kun forbinder *produkt* med produkttegnet, og ikke klarer å analysere uttrykket korrekt.

Norsk Matematikkråd viser i sin undersøkelse at der er vesentlige mangler innen grunnleggende matematikkunnskaper blant alle elevgrupper i skolen, også blant de faglig flinkeste (se kapittel 4.2). Undersøkelsen foreslår utstrakt bruk av kalkulator og liten vektlegging på forståelse og strategitenkning innen matematikk som forklaringsmodeller. Denne sistnevnte forklaring kom og fram i resultatet av derivasjonstesten, der oppgave 8 – med den mest sammensatte løsningsstrategien – ga det desidert laveste resultatet (se kapittel 4.1). Det er og et åpent spørsmål om bruk av kalkulator fører til operasjonell forståelse i og med at eleven har et kraftig verktøy til rådighet, eller om det fører til instrumentell forståelse i og med at elevene bruker dette verktøyet ukritisk uten å ha forståelse for hva som egentlig utføres.

Et sørgelig faktum som NMR's undersøkelse viser er at lærerstudentene ligger betraktelig under gjennomsnittet av prosentvis korrekte svar totalt. Lærerstudentene klarte i gjennomsnitt ikke mer enn 31,7% korrekte svar på årets undersøkelse, og som et eksempel ble det nevnt at kun hver femte lærerstudent klarte en oppgave hvor to desimaltall skulle divideres. Det ligger da nærliggende å anta at en av årsakene til de dårlige matematikkunnskapene til dagens elever kan skyldes uegnet undervisning.

Organisering av virkeligheten ved hjelp av matematiske midler kalles *matematisering* (Freudenthal 1973). Freudenthal foreslo å generalisere van Hieles nivåer som generelt rammeverk for matematisering i skolematematikk. Læringsprosessen er strukturert i nivåer hvor organiseringsaktivitetene i ett nivå blir mål for analyse i ett høyere nivå.

0. Elevene studerer objekter ved hjelp av figurer
1. Elevene studerer figurer ved hjelp av egenskaper
2. Elevene studerer egenskaper ved hjelp av implikasjoner
3. Elevene studerer implikasjoner ved hjelp av bevis
4. Elevene studerer bevis ved hjelp av formallogikk

Tabell 5: Freudenthals generalisering av van Hieles nivåer

En elev kan ikke operere på et nivå med forståelse uten å ha vært gjennom de foregående, men nivåene er kanskje ikke så diskrete som beskrevet. Hvert nivå har sitt eget språk, så elever som opererer på forskjellige nivåer vil derfor ha vansker med å forstå hverandre. Problemer vil og oppstå om en lærer uttrykker seg på et høyere enn eleven er på. Dette kan og gi problemer med vurderingen (Murray 1997).

Masami Isoda beskriver i en artikkel (1996) en modell for språk for funksjoner. Denne modellen er utviklet med å sammenligne japansk læreprakis og -stoff med van Hieles nivåer. I artikkelen peker Isoda på egenskapene ved van Hieles nivåer og viser at de er karakteristiske også for de foreslåtte nivåer for språk for funksjoner. Disse egenskapene er språkhierarki, eksistensen av uoversettelige begreper, sammenhengen objekt–metode, og elevens evne til å tenke i konteksten til matematisk språk.

Nivåene indikerer at elevenes utvikling er en trinnvis utvidelse av likevekter, heller enn en lineær utvidelse av kunnskapen.

Nivå 0 – Hverdagsspråk. Elevene beskriver forhold ved utelukkende å bruke et hverdagslig språk. Selv om de er klar over kovariasjoner, kan dette være vanskelig å forklare siden de da må benytte to variabler. På samme måte kan det være vanskelig å forklare flere ulike fenomen samtidig.

Nivå 1 – Aritmetikk. Elevene beskriver regler for forhold ved bruk av tabeller. De lager og undersøker aritmetiske tabeller. Deres beskrivelse av fenomener er mer presise med tabeller enn med hverdagsspråk. elevene har en generell oppfatning av en del regler om forhold, for eksempel proporsjoner. Elevene kan sammenligne ulike fenomener ved hjelp av regler. De kan beskrive regler om forhold, som for eksempel kovariasjon, og de kan bruke formler og grafer for å representere regler og forhold.

Nivå 2 – Algebra og geometri. Elevene beskriver og undersøker funksjoner ved hjelp av likninger og grafer. De kan lett finne likningen til en graf og vice versa.

Nivå 3 – Kalkulus. Funksjoner beskrives i termer til primitive funksjoner. For eksempel kan egenskapene til en funksjon beskrives ved hjelp av den deriverte til funksjonen. Kalkulus er en generalisert teori av denne type beskrivelser.

Nivå 4 – Analyse. Et eksempel på språk i dette nivå er funksjonalanalyse – egentlig «funksjoner på funksjoner» – som er metateori til kalkulus.

Tabell 6: Språk for funksjoner etter Isoda

Isoda setter så de fire første nivåene i disse to oversiktene sammen i en tabell som viser sammenhengen mellom objekt og metode for van Hieles nivåer, og nivåene for språk for funksjoner (Isoda 1996).

Nivå	**Geometri — van Hiele**	**Funksjoner — Isoda**
0	Elevene utforsker objekter ved hjelp av figurer. Et «trekantet» trafikkskilt har avrundede hjørner, og er derfor ikke en trekant, men kalles vanligvis en trekant i dagligspråk.	Elevene utforsker fenomener ved hjelp av hverdagslige relasjoner og variasjoner.

fortsetter neste side

fortsatt fra forrige side

Nivå	Geometri — van Hiele	Funksjoner — Isoda
1	Elevene utforsker figurer ved hjelp av egenskaper.	Elevene utforsker matematiske relasjoner ved hjelp av regler, men har vansker med å beskrive noe uten å bruke eksempler.
2	Elevene utforsker egenskaper til figurer ved hjelp av implikasjoner. Et kvadrat er rektangulært i dette nivået, men ikke i det forrige. Det er forstått, men ikke bevist, at en likebeint trekant har to kongruente vinkler.	Elevene utforsker regler ved hjelp av funksjonsnotasjoner. Konstantfunksjonen er en funksjon i dette nivået, men ikke i det forrige. Kvadratiske funksjoner beskrives algebraisk som $y = ax^2 + bx + c$, og geometrisk som parabler.
3	Elevene utforsker egenskapene, som er dannet av implikasjoner, ved hjelp av bevis. På dette nivået blir det bevist at en likebeint trekant har to kongruente vinkler.	Elevene utforsker funksjoner ved hjelp av primitive funksjoner. Tangenter beskrives ved hjelp av den deriverte funksjonen.

Tabell 7: Geometri og funksjoner

Van Hiele foreslår en sammenligning av nivåene for geometri med generell matematikk og logikk, og her brukes generelle termer som «aspekt», «essens» og «innsikt» (Fuys et al. 1988: 77). I sammenheng med denne sammenligningen foreslår og van Hiele et femte nivå som innbefatter *innsikt i logikk*.

	Nivå 0	Nivå 1	Nivå 2	Nivå 3	Nivå 4
Geometri		Aspekt i geometri	Essens i geometri	Innsikt i geometri	Vitenskapelig innsikt i geometriens teori
Matematikk			Aspekt i matematikk	Essens i matematikk	Innsikt i matematikk
Logikk				Aspekt i logikk	Essens i logikk

Tabell 8: Geometri, matematikk og logikk

Forskning (Fuys et al. 1988: 189) har vist store variasjoner i van Hiele-nivåer blant elever som befinner seg i de konkretoperasjonelle og formal-operasjonelle periodene definert av Piaget (se tabell 1 på side 3). Piagets perioder beskriver *utviklings*nivåer mens van Hieles nivåer beskriver faser i en *lære*prosess, og er dermed mer løsrevet fra alder enn Piagets perioder. Jeg vil hevde at nivåene i SOLO-taksonomien også beskriver nivåer i en læreprosess, og vil derfor forsøke å klassifisere elevene som deltok i derivasjonstesten i forhold til disse nivåene. Enkeltresultatene av derivasjonstesten er vist i vedlegg A på side 24, og kriteriene for plassering i de ulike nivåene er hovedsakelig basert på resultatene i oppgavene 3, 6, 7 og 8. Begrunnelsen for dette finner man på side 14.

Nivå	**Elever**	**Begrunnelse**
Prestrukturelt	V	Denne eleven hadde lært seg produktregelen, og forsøkte å implementere denne på de fleste oppgavene.
Unistrukturelt	A, C, K, M, O, P, Q, R, T	Disse elevene klarte ikke, eller i svært liten grad, de oppgavene hvor løsningsstrategien var sammensatt eller vanskelig identifiserbar.
Multistrukturelt	B, E, F, G, H, I, J, L, N, S, U	Disse elevene kombinerer ulike regler dersom strategien er enkelt identifiserbar. Konklusjonene som nås må derfor ses på som enkle.
Relasjon	D	Denne eleven viser klar forståelse av alle tilgjengelige løsningsalgoritmer, en forståelse av når de skulle brukes og hvordan de kunne kombineres. Den eneste feil denne eleven hadde var sannsynligvis bare en slurvefeil.
Utvidet abstrakt		Ingen elever demonstrerte kunnskap som kunne rettferdiggjøre en plassering i dette nivå – til det var derivasjonstesten ikke omfattende nok.

Tabell 9: Derivasjonstesten og SOLO taksonomi

Vi har fått en opphopning av elever på det unistrukturelle og det multistrukturelle nivået. Elevene besitter kunnskap nok til å kunne vise en del sammenhenger, men mangler kunnskap til å vise forbindelser mellom disse. Satt inn i konteksten til derivasjonstesten viser de at de kan en del derivasjonsregler, men viser liten evne til å kunne sette dem inn i uvante forbindelser. Middelverdien av alle resultatene var 13 av 20 mulige poeng, som gir 65% riktige svar. Undersøkelsen fra NMR (se kapittel 4.2 på side 11) viser at studenters kunnskap i matematikk har sunket gradvis de siste 20 årene. De oppgavene studentene ble testet i var hentet fra ungdomsskolens pensum. For 20 år siden var resultatet 72,8% korrekte svar, mens det i årets undersøkelse var 49,1%, en reduksjon på rundt 1/3. Antar vi at den samme utviklingen har funnet sted blant denne klassen i videregående skole, får vi at resultatet skulle vært bortimot 100% rett for 20 år siden.

6 Konklusjon

Jeg har i denne oppgaven analysert nivåene i van Hieles modell. Ved hjelp av Isodas modell for språk for funksjoner har jeg så sammenlignet nivåer for et individs utvikling i geometri og i funksjonslære. Resultatet av derivasjonstesten ble så klassifisert ved hjelp av nivåene definert i SOLO-taksonomien. Jeg vil avslutningsvis sammenligne nivåene i van Hieles modell og SOLO-taksonomien i et forsøk på å kunne definere en helt generelle modell.

van Hiele		**SOLO**	
Gjen-kjenning	Elevene kjenner igjen helheter uten tanke på de enkelte komponentene. Studerer figurer ved hjelp av figurer som er kjent fra dagliglivet.	**Prestrukturelt**	Elevene arbeider uten noen struktur, og går glipp av viktige poeng.
Analyse	Elevene fokuserer på relevante egenskaper, og klassifiserer og analyserer i henhold til komponentenes egenskaper.	**Unistrukturelt**	Elevene identifiserer, navngir, pugger, gjenkjenner, enkle prosedyrer og fokus på isolerte oppgaver i sammensatte problemer.

fortsetter neste side

fortsatt fra forrige side

van Hiele		**SOLO**	
Ordning	Elevene forstår abstrakte forhold mellom figurer og studerer egenskaper ved disse implikasjoner. Oppfatter implikasjonene som intuitive.	**Multi-strukturelt**	Elevene beskriver, klassifiserer, kombinerer, utfører algoritmer som ikke er ordentlig organisert.
Deduksjon	Elever forstår implikasjoner ved hjelp av bevis. Der etableres nettverk av teoremer.	**Relasjon**	Elevene sammenligner, forklarer, analysere, gjentar, anvender og integrerer
Aksiomat-isering	Teoremer etableres i ulike aksiomatiske system, og disse studeres ved formallogikk.	**Utvidet abstrakt**	Elevene teoretiserer, generaliserer, reflekterer, generaliserer, stiller spørsmål, utformer hypoteser og går utover de kjente prinsipper.

Tabell 10: van Hieles nivåer og SOLO taksonomi

Ethvert fagfelt innen matematikken har sitt eget språk og sin egen begrepsmengde, og jeg vil tro at SOLO-taksonomien, vurdert sammen med relevant språk og begrepsmengde, kan være en verdifull lærings- og forståelsesmodell for matematikk generelt. Modellen har vist seg nyttig i mitt empiriske materiale, men det må understrekes at dette materialet ikke har vært omfattende.

Jeg har tidligere understreket at van Hieles modell *ikke* er noen deterministisk oversikt over en prosess, men derimot en empirisk beskrivelse av relativt stabile nivåer. Med dette som utgangspunkt kan læringsmodeller i matematikk være til hjelp når en lærer vil analysere elevenes – og klassens – problemer, for å forbedre sin egen undervisning.

Referanser

Biggs, J. B. og Collis, K. F. (1982). *Evaluating the Quality of Learning – the SOLO Taxonomy*. Academic Press, New York.

Bråten, I. (1996). Om Vygotskys liv og lære. I Bråten, I., red., *Vygotsky i pedagogikken*, side 13–42. Cappelen Akademiske Forlag as.

Bråten, I. og Thurmann-Moe, A. C. (1996). Den nærmeste utviklingssonen som utgangspunkt for pedagogisk praksis. I Bråten, I., red., *Vygotsky i pedagogikken*, side 123–143. Cappelen Akademiske Forlag as.

Christiansen, A. (2004). *Kan man skape gode matematikklærere?* Fagdidaktisk oppgave, PPU, Høgskulen i Volda. Ikke publisert.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. D. Reidel Publishing Company.

Fuys, D., Geddes, D., og Tischler, R. (1988). *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents*. Journal for Research in Mathematics Education. The National Council of Teachers of Mathemathics, Inc.

Hardy, G. H. (1940). *A Mathematician's Apology*. Cambridge University Press.

Haug, P. (2003). *Evaluering av Reform 97*. Sluttrapport frå styret for Program for evaluering av Reform 97. Norges forskningsråd.

Imsen, G. (2001). *Elevens verden. Innføring i pedagogisk psykologi*. Universitetsforlaget.

Imsen, G. (2002). *Lærerens verden. Innføring i generell didaktikk*. Universitetsforlaget.

Isoda, M. (1996). The Development of Language about Function: An Application of van Hiele's Levels. I Puig, L. and Gutierrez, A., red., *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, bind 3, side 105–112.

Jaworski, B. (1994). *Investigating Mathematics Teaching: A Constructivist Enquiry*. Number 5 in Studies in Mathematics Education Series. The Falmer Press.

Mason, M. M. (1998). The van Hiele Levels of Geometric Understanding. I *The Professional Handbook for Teachers: Geometry*, side 4–8. McDougal-Littel/Houghton-Mifflin, Boston.

Murray, J. (1997). The van Hiele theory. I *MALATI / EMSCEP Geometry Thinkshop*, Stellenbosch, South Africa. University of Stellenbosch.

Rasch-Halvorsen, A. og Johnsbråten, H. (2004). *Norsk Matematikkråds undersøkelse blant nye studenter høsten 2003*. Rapport utarbeidet for Norsk Matematikkråd, Høgskolen i Telemark avd. EFL Notodden.

Solvang, R. (1992). *Matematikkdidaktikk*. NKI Forlaget.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction.* The Wiskobas Project Textbooks. D. Reidel Publishing Company.

Wood, D., Bruner, J. S., og Ross, G. (1976). The Role of Tutoring in Problem Solving. *J. Child Psycol. Psychiat.*, Vol. 17:89–100. Pergamon Press.

Øzerk, K. Z. (1996). Ulike språkoppfatninger, begrepskategorier og et undervisningsteoretisk perspektiv på skolefaglig læring. I Bråten, I., red., *Vygotsky i pedagogikken*, side 97–122. Cappelen Akademiske Forlag as.

VEDLEGG

A Resultat derivasjonstest

Elev	Sum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	20	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
A	12	2	2	0	2	1	0	1	0	2	2
B	13	2	2	1	2	2	0	2	0	1	1
C	12	2	2	1	1	2	0	1	0	2	1
D	19	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2
E	15	2	2	1	1	2	2	1	0	2	2
F	17	2	2	2	2	2	0	2	2	2	1
G	13	2	2	1	1	2	2	1	0	1	1
H	16	2	2	1	2	2	2	2	0	2	1
I	13	2	2	2	1	1	0	2	0	2	1
J	10	2	2	0	0	0	2	1	0	2	1
K	14	2	2	0	2	2	1	1	0	2	2
L	17	2	2	1	2	2	2	2	0	2	2
M	12	2	2	1	1	2	0	1	0	2	1
N	16	2	2	1	2	2	2	1	0	2	2
O	11	2	2	0	2	2	0	1	0	2	0
P	12	2	2	0	2	2	0	1	0	2	1
Q	12	2	2	0	2	1	0	1	0	2	2
R	12	2	2	1	2	2	0	1	0	1	1
S	15	2	2	0	2	2	2	1	0	2	2
T	10	2	2	0	1	1	1	1	0	2	0
U	12	1	2	0	2	2	2	1	0	2	0
V	4	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0
Maksimum	19	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Minimum	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Median	13	2	2	1	2	2	1	1	0	2	1
Middelverdi	13,0	1,9	1,9	0,7	1,5	1,7	1,0	1,2	0,1	1,8	1,2
Standardavvik	3,1	0,5	0,4	0,7	0,7	0,5	1,0	0,5	0,5	0,5	0,7
Totalt antall	22										

Tabell 11: Resultat av derivasjonstesten

De to linjene i tabellens hode angir oppgavenummer og maksimalt oppnåelig poengsum, og tabellens første kolonne angir samlet poengsum for hver av elevene. De statistiske verdiene i nederste del av tabellen er regnet ut for den samlede poengsum i første kolonne, og for hver enkelt oppgave i kolonnene deretter. Elevenes navn er anonymisert.