Högskolan Kristianstad
Institutionen för matematik och naturvetenskap
Lärande och undervisning i matematik, 10 poäng
Projektrapport, vårterminen 2000

Varför är skolalgebran svår?

Constanta Olteanu
Chapmanskolan Karlskrona

Handledare: Barbro Grevholm

Innehållsförteckning

Inledning ………………………………………………………………………. 3

Bakgrund……………………………………………………………………….. 4

Tidigare forskning…………………………………………………………….. 6

Plan för projektet och metod ………………………………………………….. 8

Problem och frågeställningar………………………………………………….. 10

Resultat

Test före och efter undervisningen i algebra………………………….. 12
Enkäter och intervjuer…………………………………………………. 16
Essäer…………………………………………………………………… 20
Observationer………………………………………………………….. 20
Motivation…………………………………………………………….. 22

Sammanfattning och slutsatser ………………………………………………. 23
Referenser……………………………………………………………………… 25

Bilaga 1. Diagnostiskt test i algebra för åk 1
Bilaga 2. Matematikenkät för NV1 och SP1
Bilaga 3. Prov i matematik åk 9 (Samtliga skolor i Karlskrona)

Inledning

Denna undersökning startade höstterminen 1999 vid Chapmanskolan i Karlskrona och den grupp som studeras är de elever som då började på naturvetenskapsprogrammet och samhällsprogrammet. Syftet med mitt projekt är att kartlägga elevernas förkunskaper i algebra när de börjar studierna på gymnasieskolan och att undersöka hur deras algebraiska förmåga och förståelse utvecklas med hjälp av varierade arbetsformer och innehåll i algebra undervisningen.

Titeln ”Varför är skolalgebran svår” reser ett par ganska naturliga frågor:

- Varför finner många ungdomar det svårt att förstå sig på bokstavssymboler, även om de t ex valt NV-programmet?
- I vilken utsträckning räknar eleverna på olika program med formler och algebraiska förenklingar?
- Hur kan man skapa förståelse och motivation för att använda bokstavssymboler?

Det vore angeläget att få en bättre undervisning i algebra, och för att kunna nå det behöver vi veta mer om vilka tankefel eleven gör, men också i vilken riktning undervisningen bör ändras. Kan jag få en uppfattning om detta kan jag och de andra matematiklärarna bättre hjälpa de elever som har mest problem med algebran. Om jag får möjlighet kommer jag att undersöka vilka algebraiska kunskaper eleverna har med sig när de lämnar gymnasiet.

Bakgrund

Människan vandrar ut och in på olika scener: skola, affär, lekplats, sjukhus osv. Man kan dela upp verksamheterna i vardagliga och formella. Problemen i skolan presenteras skriftligt eller muntligt till skillnad från vardagens direkt upplevda problem, som vi konfronteras med. För den som vill ta reda på vad matematik är finns egentligen inga enkla genvägar. Man måste arbeta med själva matematiken.

När elevernas talbegrepp bildas på lågstadiet, stöder de sig på upplevelser i vardagslivet och i klassrummet. Målet är självklart att eleverna ska förstå vad de menar när de skriver siffror och att det ska vara naturligt för dem att använda siffrorna. Lika självklart borde målet vara, att eleverna ska förstå vad de menar när de skriver och räknar med bokstavssymboler för tal, och det ska vara naturligt för dem att använda bokstavssymboler.

Men det visar sig att det kommer dystra och pessimistiska rapporter beträffande elevens algebraiska tänkande från hela västvärlden inte minst från Sverige.

Från Australien (MacGregor, M. Stancy, K. Pegg, 1994) kom ett studiematerial som koncentrerar sig på framställningen av algebra både med avseende på undervisning och inlärning. Syftet med framställningen var att ge läsaren en möjlighet att begrunda rötterna till algebraiskt kunnande. Man konstaterade att många elever tyckte att de algebraiska symbolspråket är svårt att lära sig och var motvilliga att använda algebraiska metoder vid problemlösning.

De internationella jämförelser som gjorts inom ramen för TIMMS- projektet visar, i förhållande till tidigare undersökningar, på en förbättring för svenska gymnasister jämfört med utländska jämnåriga i vad det gäller lösning av vardagliga problem. Däremot är resultatet sämre på det matematiktest som de svenska NT-eleverna fick i gymnasiets avgångsklass. Svagheterna fanns framförallt på uppgifter som omfattar algebra, derivata, integraler och geometri, uppgifter som testar matematiska begrepp, metoder och färdigheter utan direkt koppling till tillämpningar (TIMMS- rapport 145 Skolverket). I den ovan nämnda rapporten deltog elever som gått i den ”gamla” gymnasieskolan (Lgy 70). När det gäller elever som gått/går i den ”nya” gymnasieskolan (Lpo 94) finns ännu så länge inga längre uppföljningar.

I februari 1999 publicerade Högskoleverket sin slutrapport: ”Räcker kunskaperna i matematik?” som visar att förkunskaperna i matematik hos nybörjarna på civilingenjörsutbildningarna under de senaste året hade blivit sämre. I rapporten identifieras fem områden, där osäkerhet förekommer bl.a. behandling av rationella och algebraiska uttryck (Högskoleverket 1999).

Elevernas misslyckande i matematik och naturvetenskapliga ämnen har säkert flera orsaker, men en icke oväsentlig är antagligen svårigheter med algebraiska formelspråk, svårigheter som visar sig mer i fysik och tekniska ämnen. ”Bokstavsräkningen” kopplas främst till formler och utvärderingen av formler, moment som är fundamentala i tillämpningsämnerna. Goda kunskaper i algebra har stor betydelse för hur elever lyckas med matematikstudierna både i gymnasiet och på högskolan. Elever som inte alls behärskar det algebraiska formelspråket blir ”handikappade” då de börjar på NV- programmet. Inlärningen av det algebraiska formelspråket är en alltför allvarlig sak för att göras till ett meningslöst spel, där eleverna reflexmässigt löser en massa uppgifter då förståelsen saknas.

1996 startade IMATEC- projektet som hade som mål att undersöka företagarnas behov i vad gäller matematisk kompetens för tekniker/ingenjörer och att utveckla datorbaserade material som ska användas i matematikundervisningen. Resultatet publicerades i Nämnaren nr.4, 1999, s. 40-43. En sak som klart framgår av IMATEC-projektet är att algebra är ett av de viktigaste områdena vid fortsatta tekniska studier respektive teknisk yrkesverksamhet. Länderna som deltog i projektet: Sverige, Frankrike och England anser att viktigast i matematikundervisning är också problemlösningsförmåga och begreppsförståelse.

Datorer och grafritande räknare har givit unika möjligheter att stärka förståelsen och problemlösningsförmågan, att bygga upp symbolkänslan. I vad gäller frågan om användning av datorer och grafritande räknare i matematikundervisning visar det sig att det finns stora skillnader mellan olika länder, och att i Sverige använder naturvetenskapseleverna dem i mycket hög utsträckning. Algebrans abstrakta formelspråk kan med hjälp av dataprogram översättas till en visuell framställning. Samtidigt ger inlärning via datorn en övning i spatialt tänkande (att generalisera). Rosamund Sutherland i ”Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline ” (1994) visar att:

> *Students used a spreadsheet to solve algebra story problems by: representing the unknown with a spreadsheet cell; expressing the relationships within the problem in terms of this unknown; varying the unknown to find a solution by changing the value in the spreadsheet cell.(s. 182)*

Tillgången till nya tekniska hjälpmedel förändrar delvis matematikens innehåll och metoder. I *Karaktär och struktur* för ämnet matematik kan vi läsa :

> *Tillgången till nya tekniska hjälpmedel förändrar delvis matematikens innehåll och metoder. Många rutinoperationer, främst av numerisk och grafisk*

karaktär, kan nu utföras av miniräknare och datorer. (Lpo 94)

Algebra har i alla tider ansetts besvärlig och abstrakt. Genom konkret arbete med olika material och genom att starta undervisningen på den nivå där eleven befinner sig, har jag förhoppningar att öppna många dörrar för mina elever.

I Lpo 94 står även att läraren skall bl a:

- *utgå från varje enskild elevs behov, förutsättningar, erfarenheter och tänkande*
- *stimulera, handleda och ge särskilt stöd till elever som har svårigheter*
- *organisera och genomföra arbetet så att eleven utvecklas efter sina förutsättningar och samtidigt stimulera att använda och utveckla hela sin förmåga.*

Det var därför ganska naturligt att kartlägga elevernas förmåga och förståelse i algebra när jag i höstas (1999) fick de som började på NV och SP programmet, och att analysera hur deras kunskaper i matematik utvecklas under första året i gymnasieskolan.

En liknande undersökning startades i Sverige (Persson, P. § Wennström, T.,1998, *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse*) med huvudsyftet att beskriva förkunskaperna i algebra hos nybörjare på NV-programmet och vilka förkunskaper som är speciellt viktiga för algebrainlärningen.

I de nya kursplanerna i matematik för gymnasiet (Grevholm, B. 2000) lyfts algebra fram samt att utveckla elevernas intresse och förmåga att kommunicera med matematikens språk och uttrycksformer. En kontinuerlig uppföljning och utvärdering av elevernas studier i algebra kan ge viktig information om hur dagens gymnasieelever utvecklar sin algebraiska kompetens.

Tidigare forskning

Som eget forskningsfält är matematikdidaktiken relativt ung i Sverige, i synnerhet beträffande forskning om undervisning och inlärning på gymnasienivå finns mycket kvar att göra och många centrala frågor där man saknar eller endast har partiella svar.

Matematikdidaktisk forskning kan inte ge klara och enkla svar på de didaktiska problemen vid gymnasieskolan. Det behövs förmodligen ett långsiktigt och tålmodigt arbete av både lärare, elever, forskare och andra för att utveckla undervisningen.

Vid övergången till gymnasieskolan tas ett kvalitativt steg med avseende på en ökad abstraktionsnivå. Den matematiska abstraktionsnivån ökar i och för sig kontinuerligt från gymnasieskolans årskurs 1 och uppåt, men den avgörande skillnaden är mellan grundskolan och gymnasieskolan.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) lyfte aritmetiken upp till en betydligt högre abstraktionsnivå genom att låta bokstäver beteckna intervall på en tallinje. George Boole (1815-1864) kan betraktas som den främste grundaren av abstrakt algebra.

I mitten av 1800- talet börjar ett visst fenomens historia - kognitivismen. Många forskare har intresserat sig för barns tankestrukturer. Jean Piaget (1896 - 1980) som har en central plats i den kognitiva utvecklingen satte som sin uppgift att utreda vad kunskap är, hur den uppstår och hur den utvecklas. Under 1970- talet visar han att språket kunde vara ett medium för tänkandet. Det som gjort Piaget mest känd är hans indelning av barnets kognitiva utveckling i fyra stadier:

1) Den sensorisk- motoriska nivån (spädbarns åldern)
2) Den föroperationella nivån (förskoleåldern)
3) Den konkreta operationsnivån (lägre skolåldern)
4) Den formella operationsnivån (tonåren och uppåt)

I detta sammanhang är det de två sista nivåerna som är mest intressanta. I den konkreta operationsnivån utvecklar barnet förmågan att särskilja invarianta egenskaper som volym, massa och antal. Den formella operationsnivån utvecklas under puberteten, dvs väsentligen vid den ålder då barnet befinner i högstadiet.

Lev Vygotsky (1896- 1934) psykolog från Sovjet, betonar speciellt språkets stora betydelse för tänkandets och medvetandets framväxande. Psykolingvister har påvisat, att barn inte förstår matematikens språk. De förstår varken de abstrakta termer, som symboliserar konkreta operationer eller de vardagstermer som i benämnda tal används på ett helt annat sätt än ”till vardags”. När ett barn lär sig ett språk, upptäcker det ett sätt att konstruera världen och ett sätt att organisera sin kunskap om den. För Vygotsky var språket något mer än ett medium eller ett sätt att representera världen på; språket var själva instrumentet för tänkandet och medlet för den självreglering, utan vilken intellektuell utveckling inte äger rum.

Mercer och Edwards (1981) har i en studie illustrerat just denna språkliga förbistring hos barn. Samma termer, använda i matematik, bygger på osynliga implicita antaganden och mer väl definierade innebörder, som dock aldrig klargörs för barnen. Forskarna kunde i likhet med andra konstatera, att försöken att göra matematiken vardagsnära och begriplig genom att hämta problemen från elevens erfarenheter av människor i arbete, gjorde i stället problemen svårare för eleven (Gerd A. s.83).

Om vi ser tillbaka på forskningen så började de s k faktoranalytikerna på 50- och 60-talet att studerade den mänskliga intelligensens natur. Man sökte ta reda på om matematisk förmåga är sammansatt av ett antal specialförmågor som spatial förmåga eller numerisk förmåga. På 60- talet börjar undervisningsteknologi att formas, vars främste förespråkare var Skinner.

Flera amerikanska forskare (däribland Jerome Bruner och Kenney, 1965) hävdar att med rätt undervisning kunde också mindre barn lära sig t ex algebrans grunder, något som Bruner menade sig ha visat i sina försök att lära åttaåringar andragradsekvationer. Bruner koncentrerar sin teori på aktivitet. Det viktiga är att få eleven att delta i den process som leder till kunskap ” kunskap är en process, inte en produkt ”. Hos eleven utvecklas denna formella kunskap genom undervisning, dvs genom vissa typer av erfarenheter som eleven får i sin interaktion med skolans läroplan.

Piaget ägnade en stor del av sitt forskarliv åt undersökning av barns befintliga kunskaper och deras sätt att förstå abstrakta begrepp. Sentida kognitiva forskare har både anknutit till och avvikit från Piaget. Det fanns redan på 70- talet en mängd psykologisk litteratur, som demonstrerade den tidigare kunskapens betydelse för inlärning.

Norman och Rumelhart (1976) heter två amerikanska forskare som närmare har preciserat strukturbegreppet och utvecklat piagetiska idéer om förändringar i kunskapen. De anser att kunskap i algebra är strukturerad i form av s k *schema*
(R. Biehler et al, 1994, s.247) .

Gerard Steiner (1988) studerade hur elevens kunskap och förståelse utvecklas genom ” repetitioner ” och ” restrukturering ”. Han säger:

> *Sience transformative treatment is, as we have to be aware of, not a content but*
> *definitely a cognitive, process-bound procedure, the application of the progressive transformation ty*
> *beginning of arithmetic teaching up to the highest forms of mathematics education*
> *in secondary schools and colleges* (R. Biehler et al, 1994, s.259) .

Plan för projektet och metod

Syftet med mina studier är att följa eleverna på NV och SP - programmet i en longitudinell studie och utröna hur deras begreppsbildning och begreppsutveckling inom algebra påverkas under utbildningen. Jag kommer - förhoppningsvis - att kunna följa eleverna under hela gymnasietiden. Både kvantitativa och kvalitativa metoder används för att dokumentera deras utveckling.

Studien har pågått under tre månader. Avsikten var att följa de elever som började på NV och SP- programmet hösten 1999 och undersöka hur deras algebraiska förmåga och förståelse utvecklas genom att välja varierande arbetsformer och innehåll i algebra undervisning.

För att dokumentera elevernas förkunskaper och förståelse i algebra testade jag samtliga elever innan studierna i algebra påbörjats (det var 64 elever som deltog i testet). Efter genomgången på test, ska jag intervjua eleverna varför de gjorde respektive fel. Jag tror att det är mycket nyttigt för eleven att tvingas tänka efter.

Under några veckor ska vi läsa algebra (15 h) genom att fokusera på tolkning och översättning till matematiskt språk, vad algebraiska uttryck och bokstäver betyder, variabelbegreppet, problemlösning, symbol och vad symbolen står för, det algebraiska formelspråket, osynliga tecken. Allt detta ska göras med hjälp av olika träningsprogram och övningar. Genom att konstruera olika träningsprogram och övningar har jag till syfte att både förbättra elevers prestationer, pröva mina hypoteser och att studera elevers utveckling.

Eftersom undervisningen sker i heterogena grupper där grupp- och klassdiskussioner spelar stor roll, tänker jag att inleda mina lektioner med att i arbetsprojektorn lägga repetitionsuppgifter från grundskolan eller uppgifter som skall behandla något från den nya lektionen. Jag vill inte dela ut papper med uppgiften utskriven, ty dels får eleverna redan nu alldeles för mycket papper, dels tror jag att själva avskrivningsmomentet är bra övning för eleverna. Jag försöker välja uppgifter så att de flesta eleverna skall klara av dem på cirka 5-10 minuter. Beroende av hur eleverna har lyckats med uppgifterna kan följa ibland en diskussion, någon uträkning eller förtydligande på tavlan.

En fördel med denna metod är att aktivera alla eleverna på en gång vid lektionens början och att ge eleverna någon hjälp med att sammanknyta vad de upplevt tidigare med nya begrepp (t ex jämförelsen sifferräkning/bokstavsräkning). En annan fördel är att det finns tillfällen då eleven själv kan tolka och översätta välkända fraser till matematiskt språk och tvärtom. Detta ger eleverna möjlighet att skriva en egen matte - ordlista som syftar på att träna upp den matematiska terminologien.

Jag tänker arbeta på vissa lektioner med kalkylprogram (t ex EXCEL) som erbjuder en möjlighet att få känsla för hur formler med variabler fungerar. I ett kalkylprogram kan eleverna arbeta med formler på ett undersökande sätt och som hjälper eleverna att förstå hur bokstavssymboler kan användas som beteckning för variabler. Övningarna syftar på översättningar mellan numerisk och symbolisk uttrycks form.

Då och då inleder jag mina lektioner genom att låta eleverna skriva om hur de upplevt ett avsnitt, hur de tänkte, reagerade, räknade osv. Syftet är att få eleverna att förstå sin egen inlärningssituation.

Jag söker efter tecken på hur deras begrepp påverkas eller förändras. Det var därför jag har upprepat samma diagnostiska prov, frågeformulären och intervjuerna efter kapitlets slut, för att se om förändringar har skett i elevernas syn på algebra. Det blir en slags mätare på vad de lärt sig.
Syftet är:

- bättre test resultat
- helhetsbild i vad gäller algebraiska symbolspråket
- förståelse för osynliga tecken
- kvalitativa förändringar i vad gäller den algebraiska resonemang

Jag tänker på att ständigt utvärdera mitt arbete. Utvärderingen sker med hjälp av enkäter med slutna och öppna frågor, spontana frågor, intervjuer, essäer, informella samtal som ger mig möjlighet att få fram elevernas synpunkter på de nya metoderna som förekommer i undervisningen. Allt detta görs i kombination med mer traditionella klassrumsobservationer av beteenden, insamling av prov och andra skriftliga arbeten plus uppföljning av dess intervjuer. Svaren från enkäten har bearbetas.

En svårighet vid en sådan undersökning är att jag snabbt får väldigt mycket material att strukturera och analysera. För att undvika tolkningsproblem på grund av bortfall, försökte jag att minst 70 % av eleverna ska svara på enkäterna. En annan svårighet var att göra en sammanställning av informella samtal resultat och begreppsförståelse.

Jag hoppas att, genom detta, kunna kartlägga vad som har hänt med den algebraiska förmågan och förståelsen och hur detta påverkar elevernas studier på NV och SP-programmet.

Problem och frågeställningar

Matematik är ett ämne som har speciella möjligheter att erbjuda oss alla ett övningsfält, där vi kan utveckla tankekrafterna och förvärva ett växande förtroende till tänkandet Om vi inskränker oss till aritmetik och algebra kan vi urskilja tre abstraktionsnivåer beträffande talen:

- talen skrivs eller tecknas med bilder
- talen anges med rätt abstrakta tecken
- talen representeras med bokstäver

Det kan vara ett långt steg att gå från att räkna med tal till att räkna med bokstäver och det kräver tid. Liv Sissel Grønmo diskuterade i fyra tidigare Nämnarenartiklar *Att sätta ord på algebra* (1999, Nämnaren nr.1 s. 19-25), *En bokstav kan säga mer än tusen ord* (1999, Nämnaren nr.4 s. 20-26), *Att tänka algebraiskt* (1998, Nämnaren nr.1 s. 15-20), *Att förstå algebra* (1998, Nämnaren nr.4 s. 35-41), problem som elever har i algebra. Här ges exempel på hur medveten användning av tal- och skriftspråk kan bidra till att förstärka inlärning. Att använda språket som redskap för att ge mening till symboler är viktigt för att utveckla begrepp.

Språket uttrycker idéer, men i algebra beskriver ofta orden betydligt mer än ordens innehåll, idéerna. Det algebraiska språkliga problemet diskuteras inte ofta av matematiker. Inlärningen av det algebraiska formelspråket är en alltför allvarlig sak för att göras till ett meningslöst spel, där eleverna reflexmässigt löser en massa uppgifter och där minsta ändring av mönstret medför att många elever är helt ställda, då förståelsen saknas.

Marsha Hurtwitz lärare vid Duchesne Academy, Houston skrev följande:

> *Much of the elegance of mathematics lies in symbolism that allowws us to manipulate complex ideas. However, without comprehension of the substance behind the symbolism, the memorization of symbols is meaningless.*
> *(Mathematics Teacher, december 1990)*

Det algebraiska språket är ett standardverktyg för att precist hantera tal och funktioner, och en grund för vidare studier. Därför är det viktigt att alla ges möjlighet att lära sig hantera detta språk. Det utgör dessutom ett verktyg för tänkande, och möjliggör för eleven att upptäcka enkelhet och struktur i komplexa sammanhang. Frances R. Curcio, Barbara Nimerofsky, Rosanna Perez och Shirel Yaloz (1998, Nämnaren nr. 3, s. 14 - 20), i artikeln *Utvecklande problem*, beskriver elever i Middle School, årskurs 5-8, som arbetar med tidig algebra. Via otraditionella problem gör eleverna upptäckter om mönster och generaliseringar. I diskussioner utvecklas deras beskrivningar till symbolspråk. De största svårigheterna verkar finnas i ”översättningarna ” mellan vanligt språk och symbolspråk. En frågeställning som intresserar mig är varför många ungdomar finner att det är svårt att förstå sig på bokstavssymboler, även om de t ex valt NV-programmet?

Pour connaître une langue naturelle, il n'est pas nécessaire d'en apprendre l'histoire ni, pour comprendre sa littérature, de faire l'étude historique de la grammaire et du vocabulaire. À cet égard, le langage mathématique, en raison de son caractér plutôt artificiel, se présente bien différemment. Alors que l'accord qui est á la base d'une langue naturelle n'a jamais été exprimé explicitement, les conventions du langage mathématique l'ont toujours été.
(Hans Freudenthal, 1994)

Frances Curcio & Sydney Schwartz (1998, Nämnaren nr.1, s. 15 - 20) visar i artikeln *Förskolebarns algebraiska tänkande* att genom konkret arbete med olika materiel utvecklas barnens tänkande kring matematiska idéer. Artikeln beskriver hur några förskolebarn samtalar kring ett par aktiviteter. Samtalen avslöjar tidigt algebraiskt tänkande.

Goda algebraiska kunskaper, både i vad gäller färdigheter och när det gäller förståelse kräver lång tid och aktiva insatser från elever. Många elever uppfattar algebra som ett spel med en samling regler, ofta meningslösa och svåra att förstå. En annan intressant frågeställning är hur kan man skapa förståelse och motivation för att använda bokstavssymboler?

I *Algebra för alla* (1997, Nämnaren Tema) behandlas grundläggande matematik-undervisning. Bakom titeln ligger tanken att alla lärare som arbetar med matematik i grundskolan och gymnasieskola ska ha glädje av algebran och målet att alla elever ska få möta matematikens generaliserande kraft.

Kunskaper och färdigheter i algebra är ett måste för fortsatta studier i såväl matematik som i ämnen där matematik används, t.ex. fysik och tekniska ämnen, där formler alltid ligger till grund för eller utgör resultatet av experiment och diskussioner. I vilken utsträckning räknar elever i olika ämnen med formler och algebraiska förenklingar?

Trots en hel del forskning på området är det mycket som man inte vet om inlärningsprocessen.

Resultat

Test

Under höstterminen fick eleverna göra fyra olika förkunskaps test i algebra. Totalt 64 elever testades på uppgifter omfattande översättningsuppgifter, där det gäller att ta sig från uttalanden på vanligt språk till algebra och tvärtom, förståelse av minus tecknets betydelse, ekvationslösning, insikter och färdigheter i ” bokstavsräkning ”. Testet gjordes utan räknare och varje rätt svar gav 1 poäng. De olika områdena har testats vid två tillfällen: i början av varje avsnitt och efter avsnittets slut.

I det matematiska språk man använder i skolan finns det ord som är naturliga för lärare men inte för eleven. Barn på alla stadier kan ha svårt att förstå en text helt enkelt för att de inte förstår orden. Min avsikt var i första hand att testa en del terminologiord som: summan av, produkten av, inverterande talet till, kvadraten på.

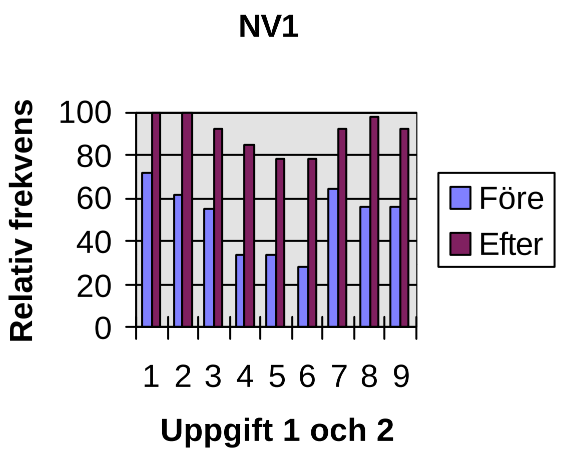
Uppgift 1
Skriv med hjälp av matematiska symboler:

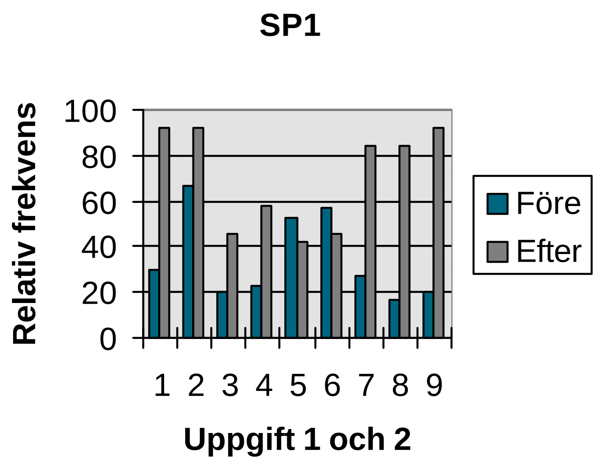
1) Summan av x och 3
2) Produkten av x och 3
3) Produkten av 6 och summan av x och 3.
4) Summan av 6 och produkten av x och 3
5) Inverterade talet till b
6) Produkten av a och kvadraten på b

Uppgift 2
Skriv med vanliga ord:

7) $A = a^2 + b^2$
8) $B = 3(a + 4)$
9) $C = 4 - 3x$

Resultaten visar att såväl tolkning som översättning till matematiskt språk av välkända fraser fann många elever svårt. Sådana översättningar är både en grund för förståelse och ett problemlösningsverktyg. Lärare i tillämpade ämnen tänker antagligen inte på detta som kan ha stor betydelse för elevernas förståelse i ett inledningsskede. Genom att låta eleverna skriva en egen matte - ordlista (Gudrun Malmer - Bra matematik för alla s.49) och genom att använda frekvent sådana ord (och andra) på mina lektioner visade det sig att eleverna tycks förstå. Vi kan jämföra lösningsfrekvenserna vid det andra testtillfället med det första. Diagrammet nedan visar resultaten.





Vid andra tillfället testade jag förståelsen av negativa tal och minustecknets betydelse.

Uppgift 3

Vi har följande omvandlings maskin: a → motsatt → -a
Vilket resultat ger maskinen i följande situationer:

3 → motsatt →

3x → motsatt →

3 + x → motsatt →

2x - 3 → motsatt →

- 4x + 3 → motsatt →

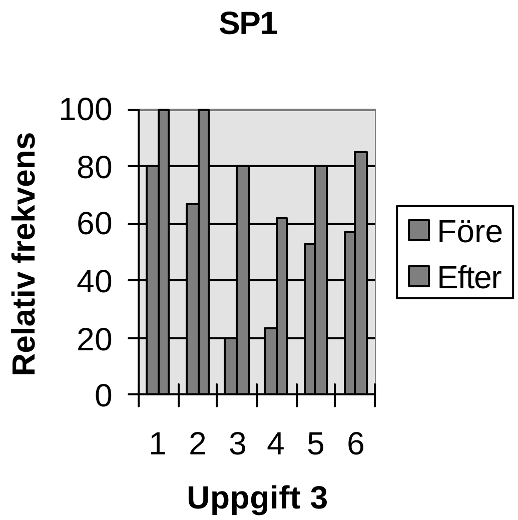
- 7x - 2 → motsatt →

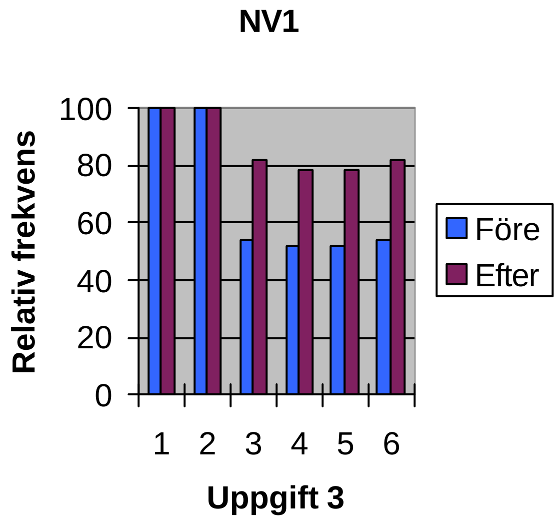
Många elever har en begränsad uppfattning av negativa tal och minustecknets betydelse. Jag gjorde då en del uppgifter som de löste på traditionellt sätt. Uppfattningen förstärktes genom arbetet med uppgifter där negativa tal och minus tecken förekom ofta och räkneoperationen hade tydliggjorts. Jag tyckte att det var dags för ett nytt test för att se om de hade förbättrats. Jag kunde konstatera att resultatet hade blivit bättre.

Flera tidigare undersökningar har visat på stor osäkerhet hos eleverna beträffande förståelsen av enkla algebraiska manipulationer. Min undersökning visar att elevernas förståelse för grundläggande begrepp som ligger mellan aritmetik och bokstavsräkning, många gånger inte är tillräckligt utvecklad. T ex negativa tal är svåra att acceptera. Om man är lite ödmjuk och studerar matematikens historia framgår det vilka svårigheter man haft med negativa tal. Till och med en så framstående matematiker som Euler hade problem med detta. Att göra eleverna medvetna om minustecknets tre betydelser:

- som beteckning för negativa tal,
- som beteckning för subtraktion,
- som beteckning för motsatt tal

är en viktigt uppgift för oss lärare. Med tanke på Eulers problem och att det tagit mänskligheten lång tid att acceptera negativa tal, bör man ge eleverna tid och olika förklaringsmodeller som kan leda till förståelse av beräkningar med negativa tal.





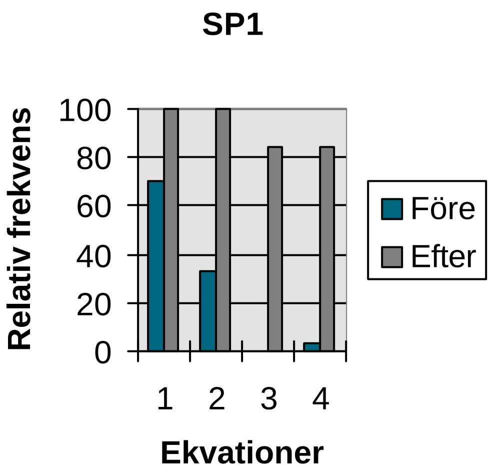
Av stort intresse var för mig det tredje testet i vilket jag testade ekvationslösning och bokstavssymboler.

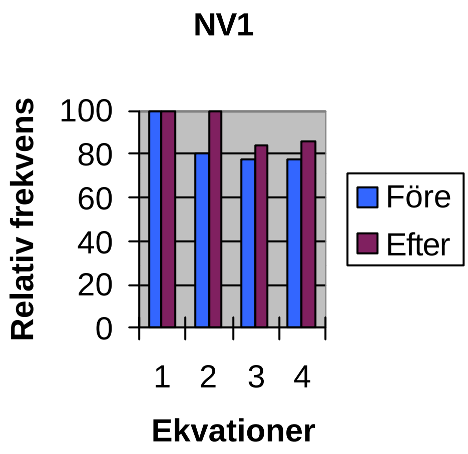
Uppgift 4

Lös följande ekvationer:

1) $4x - 12 = 0$ 2) $2 - 3x = 0$ 3) $\frac{x}{3} = \frac{4}{7}$ 4) $3x + 4 = x - 8$

Diagrammet nedan visar resultaten.





Min åsikt är att för att kunna uppskatta värdet av ekvationer som ett verktyg måste man först kunna ställa upp och lösa ekvationer, inte bara att gissa (Jean Julo, 1995, s.97). Vi har tränat på ekvationslösning genom att arbeta med olika lösningsmetoder. Det visade sig att när det obekanta talet finns på mer än ett ställe, har eleverna vågat räkna med det okända. Denna tankemässiga svårighet kan reduceras genom användning bl a av Excel - kalkylblad. Förstår man hur de olika delarna av en ekvation kan tolkas, varför räknereglerna vid ekvationslösning fungerar, blir arbetet att lösa en ekvation både tryggare och mer meningsfullt. Jag har betonat att bokstäverna i en ekvation betecknar tal och att det finns osynliga tecken som t ex $4x = 4 \cdot x$.

Matematiska symboler kan man skriva, läsa, hantera och tolka. Utifrån detta ville jag kartlägga elevernas förkunskaper i vad gäller parentesers betydelse, osynliga tecken, symbol och vad symbolen står för. Utifrån testresultaten har jag tränat medvetet för att utveckla elevernas symbolkänsla.

Uppgift 5

Förenkla:	SP1		NV1	
	Före	Efter	Före	Efter
2a + 3a	72%	100%	93%	100%
12 - a + 8 - b + 5 - 2b + 11 + 4a	43%	85%	77%	93%
a·a - a	64%	100%	93%	100%
3x·2x	64%	93%	93%	100%
3(2a)	84%	100%	100%	100%
(- 4b)(3b)	84%	100%	93%	100%
5(- 3c)	64%	95%	80%	95%
5(4 - x)	43%	90%	67%	93%
27 - (x - 13)	30%	65%	43%	90%
2x - 3 - (x - 4)	30%	60%	33%	90%
x - (- 2x + 3) + (4 + x)	25%	60%	30%	85%

Uppgift 6

Välj rätt svar för varje fråga i följande tabell. Det kan vara 0, 1 eller flera rätta svar.

	a	b	c	d	e
x^2 är lika med	$x + x$	$2x$	$x\cdot 2$	$x\cdot x$	$x^3 - x$
$x + x$ är lika med	$x + 2$	x^2	$x\cdot x$	$2x$	$x(1 + 1)$
$x - 1 + 2x$ blir	$3x - 1$	$2x + 3$	$- x - 1$	$- 1$	$x+1 - 2x$
$x - 3(x + 1)$ blir	$- x + 3$	$- x - 3$	$1 - x$	$- 1 - x$	$- 3 - x$
$3x + 4x$ är lika med	$12x^2$	$12x$	$7x$	$7x^2$	$3(x + 4)$
I uttrycket $6x + 9$ är det naturligt att bryta ut	3	2	-3	-2	7
$a(a + 1)$ är lika med	$2a$	$a^2 + 1$	$a^2 + 2$	$a^2 + a$	$2a + a$
Hälften av a är lika med	$a/2$	$2/a$	$\frac{1}{2a}$	$0,5a$	$\frac{1}{2}a$
$(x + 9)^2$ är lika med	$x^2 +9$	$x^2 +81$	$(x + 9)(x + 9)$	$x^2 +8 + 18x$	$x^2+81x+18$

Ungefär 30 % av eleverna fann alla uttryck på SP - programmet och 58 % på NV-programmet vid första testtillfället och 64 % respektive 89 % vid andra testtillfället. Det visar sig att en del av eleverna på båda programmen har haft väldigt dåliga förkunskaper i algebra och en del av dessa elever nästan inte alls har sysslat med algebra i grundskolan. Vissa elever upptäcker att de förlorat många poäng på samma tankefel gång på gång. Då får de stark motivation till att lära sig hur det borde vara. Andra elever upptäcker att de slarvat på många ställen. Några få kan inte alls ge någon förklaring till sina fel. Men när jag upprepar förklaringarna visar det sig att de i regel lärt sig att förklara hur de tänkte. Deras reflekterande hållning har förändrats och det är mycket lärorikt för mig att läsa hur de tänkt när det blev fel.

Jag får hoppas att jag kan följa de eleverna i åk 2 och undersöka hur deras känsla för algebra utvecklas.

Enkäter

Efter första testet fick eleverna besvara en enkät. Enkäten har kompletterats med intervjuer. Syftet med min enkät och intervju var att få fram vad som är karakteristiskt för ett antal elever, pröva mina hypoteser och ge svar på min fråga om i vilken utsträckning använder de algebra i andra ämnen än matematik. Det var 62 elever som svarade på enkäten och 8 elever intervjuades. Några av deras svar redovisar jag vidare.

1. ***Hur tror du att dina kunskaper i algebra var i slutet av nian? Förklara kortfattat.***

   Det visar sig att 30 % av eleverna på NV-programmet och 62 % på SP- programmet inte har jobbat alls med algebra i grundskolan.

   Dåliga. Vi fick välja mellan två böcker en ” svår ” och en ” lätt ” och tyvärr valde jag den lätta. (NV)

   Inga alls, eftersom vi inte gjorde det alls på högstadiet. (NV)

   Väldigt dåliga. Hade inte alls mycket algebra i nian. Det var jobbigt för mig i ettan eftersom allt var nytt (NV)

   Tillräckliga för mitt betyg men annars begränsade (NV)

   Ja kunde ej så mycket från nian (SP)

   I nian hade vi inte så mycket ekvationer och så, utan mest att vi skulle förstå att x var okänt och att man skulle hitta värdet. Vi han inte räkna så mycket algebra därför var allt okänt när jag kom (SP)

2. ***Vi har redan gått genom algebra i matematik. Har det skett några förändringar i dit sätt att se på algebra? Förklara kortfattat.***

Elevernas svar visar att genom adekvat undervisning och med utgångspunkt i deras förutsättningar är det möjligt att skapa förståelse i algebra.

Ja, jag har utvecklats och lärt mig mycket nytt. Jag behöver mer tid. (NV)

Ja, jag har börjat lära mig lite vad det hela går ut på (NV)

Ja man ser mer logik i det nu. (NV)

Ja, man förstår grunderna bättre. (NV)

Jag har lärt mig mer och djupare än i nian. (SP)

Jag kunde ganska mycket om algebra när jag gick nian, men jag känner mig säkrare på det nu och jag känner att jag kan ytterligare lite till (SP)

Nu förstår jag mer och jag känner mig säkrare (SP)

3. ***Vilket var det svåraste att lära dig? Varför ?***

Det finns elever som anser att det behövs mer tid för att nå goda algebraiska kunskaper, både i vad gäller färdigheter och förståelse.

Jag tycker det var svårast att räkna med bokstäver. Det tog lite tid innan man fick allting klart för sig. (NV)

Det svåraste är när frågan är formulerad ”så långt som möjligt”. Jag vet inte när det är. (NV)

Det är svårt att veta vad man ska börja med, mycket att hålla reda på. (NV)

Allt med algebra är lika svårt. (NV)

Nya matematiska tal och formler. Det tar sin tid att lära sig sådant som är nytt. (SP)
Problemlösning och tillämpningar (SP)

4. ***Använder du det algebraiska språket oftare och även i andra ämnen än matematik?***

Elevernas svar på den frågan visar att det behövs mer samarbete över ämnesgränserna och den skall knytas till vald studieinriktning.

Jag använder det algebraiska språket mer nu än tidigare, eftersom jag behärskar det bättre nu. (NV)

Pascal och fysik aldrig annars (NV)

Inte så mycket i andra ämnen (NV)
Nej, det tror jag inte. (SP)

Inte vad jag vet!!! (SP)

5. ***Vidgade detta i så fall din förståelse, eller gjorde det också det andra ämnet till en början svårt?***

   Jag fick inget svar på den fråga av SP- elever.

   Jag har ej haft stora problem med algebra så att använda algebra i andra ämnen har gått bra. (NV)

   Först var det nog svårare men sedan när allt stämde så gick det hyfsat. (NV)

   Det blev lättare (NV)

6. ***Vad använder du för teknik när du löser uppgifter i algebra?***

   Jag tänker på vad det finns för olika regler och ser om jag kan tillämpa någon. (NV)

   Steg för steg. Dela upp i delar. (SP)

   Om jag inte lyckas lösa eller förstå talet håller jag på tills jag gör det. (NV)

   Vet inte. Jag försöker ta en sak i taget när det är stora uppgifter och ta det lugnt. (NV)

   Lite som det faller sig. (SP)

7. ***Kan vi bli effektivare ?***

   Då beskrev eleverna för mig vilket hårt tryck de har på sig med uppgifter, läxor och prov i alla andra ämnen än matematik. Själva menar de att det nog är ytterst svårt att bli effektivare.

Intervjuer

Det är svårt att från ett provresultat få en klar uppfattning om hur eleven löst en uppgift eller vilken tankeform eleven har använt. Genom att komplettera testen med intervjuer kunde jag få reda på hur eleven faktiskt tänkt. Vid sådana samtal kunde jag finna att elevens svårigheter ofta beror på missuppfattningar eller att eleven fastnat i alltför tidsödande tankeformer. Det var därför av stort intresse för mig att ta reda på vad svårigheten är och att få eleverna att upptäcka och formulera den svårigheten.

1. ***Hur kan du veta att lösningen till ekvationen 3x + 4 = x - 8 är rätt ?***

   Efter att jag har räknat ut vad x är , om jag fått t ex fem så sätter jag in det i stället för x. (SP)

   Man kan anta att x är t ex 9 och kontrollera (NV)

   Jag byter ut x mot talet som jag fann och jag kollar om resultatet på den ena sidan är lika med resultatet på den andra sidan. (NV)

   Processen att lösa ekvationer har mekaniserats under högstadiet. Intervjuerna visar att flertal elever väntar sig regler för att göra någonting medan de tappat bort att en ekvation uttrycker någonting.

2. ***I vilka sammanhang har du använt ekvationer ?***

   Mekanik och fysik (NV)

   När man handlar t ex så många saker så möjligt som kostar 5 kr/st = 5x = 100. Om man har 100 kr! (SP)

   Man använder nog inte sådär ofta utanför matematik. (SP)

3. ***Hur uppfattar du uttrycket 3x + 4x ?***

   (3 + 4)x (NV)

   3x och 4x står för sig själva (SP)

   x står som ett okänt objekt (NV)

   Jag uppfattar det som ett ofärdigt uttryck (SP)

   Att man först bestämmer sig för att köpa tre saker av en vara och sedan kommer på att man vill ha fyra till. Alltså har man 7 saker av samma vara. (SP)

   Hur mycket det kostar att köpa först 3 saker för t ex 4 kr sen 4 saker till för lika mycket. (NV)

4**. Vad innebär det 6x + 9 = 3(2 x + 3)? Vad har man för nytta av detta ?**

Jag vet inte. Man brukar skriva så! (SP)

Att jag har samma på båda sidor av lika med tecknet och alltså om man har två
olika varor så kostar de lika mycket (SP)

Att det är lika mycket på båda sidor. (NV)

Ingen vettig lösning! (NV)

Man har brutit ut 3. Det kan vara bra om man ska förkorta eller förenkla ett tal.
(NV)

Hur som helst uppstår genom samtalet en kontaktkänsla, som inte uppstår via ett diagnostiskt prov. De flesta elever vill förstå, och de vill gärna att matematiken ska gå bra oavsett om de går på NV eller SP- programmet.

Essäer

För att få fram elevernas åsikter i vad gäller undervisningsformerna som jag har valt låta mina elever skriva helt fritt om sina intryck. En fördel med essäerna är att få de aspekter belysta som eleverna själva bedömer som mest väsentliga att ta upp. Formuleringarna blev ofta personliga, vilket gör läsningen intressant.

En olägenhet var svårigheten att göra en sammanställning av resultaten. Jag ger därför några citat - exempel som är typiska, eller representativa för helheten.

Jag tycker att lektionerna är bra. Vi går lagom fort fram och det är bra att vi går igenom ordentligt utan att stressa i väg. Allt är jättebra och jag tycker att du är en bra lärare. (SP)

Jag tycker ditt system är helt OK! Det tycker jag att vi ska fortsätta med. (NV)

Jag tycker att vi under 3 veckor har hunnit långt och att man har lärt sig jätte mycket. Litet svårt att hänga med ibland. (NV)

Jag tycker att allt funkar jätte bra! Det är mycket bra att vi har regelbundna genomgångar på tavlan, något som vår förra lärare tyvärr inte hade! Du är en jätte bra, engagerad lärare, som kan sin sak. Din glädje för ämnet smittar av sig på eleverna. (NV)

Observationer

Utifrån elevernas resultat på de fyra testerna, sammanfattning av mina observationer och intervjuer kunde jag få fram var den dolda punkten finns där förståelsen har upphört och (vanligen) ett missförstånd insmugit sig. Jag har grupperat såna punkter i följande huvudtyper:

- eleven har brister i sina aritmetiska färdigheter
- det algebraiska formelspråket behärskas dåligt
- att blanda ihop symbolen och vad symbolen står för
- vissa elever har inte förstått i slutet av nian att det finns osynliga tecken i algebra

Aritmetiska färdigheter

Förståelse av de olika räkneoperationerna och deras egenskaper utgör basen för algebraiskt tänkande. När eleverna inte vet att man måste prioritera multiplikation före addition skapar det än större problem när man senare inför bokstäver som symboler för variabler.

$a \cdot a - a$	blir felaktigt	a visar att eleven räknar subtraktion före multiplikation.
5(4 - x)	blir felaktigt	20 -x visar att eleven missuppfattat binommultiplikation.
x - 3(x + 1)	blir felaktigt	2x - 2 eller 2x - 3 visar en kombination av missuppfattningar (subtraktion före multiplikation och/eller binommultiplikation).

Hälften av a ses av många elever enbart som $\frac{a}{2}$ och/eller 0,5a. Resonemangen hos många elever tydde på bristande förståelse för innebörden av division och multiplikation.

Felaktigheter som t ex

$\boxed{3 + x}$ — $\boxed{\text{motsatt}}$ → $\boxed{- 3 + x}$

$\boxed{2x - 3}$ — $\boxed{\text{motsatt}}$ → $\boxed{2x + 3}$

$\boxed{4x + 3}$ — $\boxed{\text{motsatt}}$ → $\boxed{- 4x - 3}$

$\boxed{- 7x - 2}$ — $\boxed{\text{motsatt}}$ → $\boxed{7x - 2}$

är ju bara alltför vanliga. Det skapar än större problem när man senare inför parenteser.

T ex :

7x - (5 + 3x) blir felaktigt 10x - 5
(3x + 2) - (x - 1) blir felaktigt 3x + 2 - x +1 eller 3x + 2 + x + 1
2x - 3 - (x - 4) blir felaktigt x - 7 eller 3x + 1

Algebraiska formelspråket

Det algebraiska formelspråket uppfattas både som svårt och ibland som inkonsekvent av eleverna.

Summan av x och 3 blir felaktigt ofta 3x och produkten av x och 3 blir x + 3 (SP)
Summan av 6 och produkten av x och 3 blir felaktigt 9x eller 6·3 + x eller 6 + 3x
Produkten av 6 och summan av x och 3 blir felaktigt 18x
Inverterade talet till b blir felaktigt - b

Här visades att det finns elever som inte är bekanta med ord som summa, produkt, inverterad, och som leder till bristande begreppsbildning och missuppfattningar. Av eleverna som skrev rätt algebraiskt uttryck på första och andra frågan var 30% som svarat fel på uppgift tre och fyra. Svaret tyder på att det blir svårare att skriva rätt uttryck när språket kombineras med matematiska kunskaper.

Symbol

Det finns ganska många elever som inte förstår den algebraiska syntaxen. Det är t.ex. vanligt att elever som tolkar $3x$ som " tre stycken x:n" inte kan generalisera detta till $3x{\cdot}2x$, utan det visade sig att de ser $3x{\cdot}2x$ som " $3x$ och $2x$ " dvs " $3x + 2x$ ". Bokstaven används som objekt eller förkortning.

$2a + 5a$ tolkas av eleven som ett objekt (t ex *a* betyder äpplen) och då blir uppgiften lätt. Denna misstolkning fungerar visserligen i uppgifter av den här typen, men leder till svårigheter med andra. T ex (- 4b)(3b) blir felaktigt -b eller
12 - a + 8 - b + 5 - 2b + 11 + 4a blir ännu svårare.

Osynliga tecken

$5{\cdot}(-3c)$ blir $5 - 3c$
Några elever har motiverat sitt svar med regeln " olika tecken ger minus " varvid alltså de olika tecken utgörs av ett multiplikations och ett subtraktionstecken.

Konventioner som 3(2x + 3) = 6·x + 3·3 är obekanta för många elever.

3x·2x blir felaktigt 6x

Det finns också en del elever som inser inte att kombinationen av 2 och x betyder olika saker om man skriver 2x eller x^2

I NV-klassen har jag även fysik och data. Genom att ständigt använda vad vi har tränat i matematik, samma terminologi och datorer som hjälpmedel har elevernas förståelse för bokstavsräkning ökat markant. Detta var inte möjligt i SP - klassen.

Motivation

Det är en allmän erfarenhet, att när elever upplever sig förstå vad de sysslar med och finner det ur någon synpunkt intressant, så ökar deras motivation. Motivationens betydelse i samband med algebra är uppenbar. Den bästa formen av motivation kommer inifrån, när arbetet känns meningsfullt eller uppgiften väcker intresse, nyfikenhet, engagemang. Förutsättningen är bara, att eleven tycker sig förstå vad det är frågan om, och att uppgiften är lagom svårt. Algebra blir bra mycket trevligare om man åtminstone förstår. Lärarens attityder till ämnet, undervisningen har också en inverkan på motivationen.

Ett enkelt språk, en vänlig och förståelsefull lärare som samtidigt begär att man ska förstå och kunna förklara ger plötsligt positiva elevereaktionen: ”Allting är ju roligt när man förstår!”. Att lita till det egna tänkandet utgör en grund för att utveckla tänkandet.

Sammanfattning och slutsatser

Vi vet att i fysik (kemi, biologi) och teknik är goda kunskaper i matematik nödvändiga. Vi behöver många duktiga naturvetare och tekniker. Men det behövs många som är duktiga i matematik inom samhällsvetenskapen och särskilt inom ekonomi.

Algebrans begrepp och metoder är inte vardagsförankrade, så att de på ett naturligt sätt kan utvecklas av eleven själv, utan de är en typ av vetenskaplig kunskap som kräver undervisningsstöd av professionella lärare. Senare års forskning om matematikinlärning har visat att bokstavsymboler är lätta att använda, men svåra att förstå. Vad eleverna lär sig i matematik på grundskolan är viktig information för gymnasielärare. Det gäller även elevernas tidigare erfarenheter av arbetsätt och arbetsformer. I bilaga 3 kan man se ett prov som syftar till att kontrollera elevernas kunskaper i slutet av åk 9 (det gäller G - nivån) och som har som syftet att ge underlag vid betygssättning i samtliga högstadieskolor i Karlskrona Kommun. Provet var konstruerat av åtta matematiklärare som undervisar på åtta olika högstadieskolor.

Provet har i första hand avsett räknefärdigheten. Men det krävs, för fortsatta studier, även andra slags matematikkunskaper än dem som testats där (t ex prioriteringsreglerna, negativa tal, elevernas abstraktionsnivå eller användning av matematisk terminologi). Klarar man 70 % eller 60 % av provet får man G som betyg. Men det visar sig att de elever som fick G i betyg i slutet av 9-an har, åtminstone initialt, svårt att klara nya matematiska begrepp på Ma A och ännu svårare på MaB. Det finns stora variationer i förkunskaperna hos dem som börjar gymnasiestudier inom naturvetenskap och ekonomi. Det finns skillnader mellan olika typer av utbildningar, men det finns också stora variationer mellan eleverna på samma utbildning.

Både testresultaten och intervjuerna, i vilka eleven ombads beskriva hur de tänkt, avslöjade allmänt spridda svagheter när det gällde förkunskaper och förståelse av algebra. Den tid som nu anslås till Ma A borde vara tillräcklig för att resultatet av algebrastudiet skall kunna förbättras för flertalet elever. Men det visar sig att det behövs mer tid för vissa elever till övning på enkla sammanhang, där eleverna förstår vad de gör och inte bara mekaniskt återger mönster.

Om eleverna inte uppfattar motiv och mening med bokstavssymboler för tal och andra symboliska beteckningar under tidigare skolår bidrar det till en klyfta mellan elevernas verklighet och skolmatematiken. Eleverna famlar mer eller mindre blint efter mönster och sammanhang bland symbolerna.

Det är viktigt att eleven har en bra erfarenhetsbakgrund när abstraktionen till bokstavssymboler och räkning med dem skall ske. Det är givet att ungdomar lär sig ord genom att vuxna använder dem; används orden inte, lär sig ungdomarna dem inte heller. Men klyften ökas när läraren använder ord man inte begriper, utan att han har en aning om att man inte förstår.

Jag tycker att undervisningen i algebra måste byggas på förståelse och begreppsbilder, och att upptäcka bandet mellan aritmetik och algebra samt se på vilka sätt elever kan knyta dessa band. Eleven måste öva sig i att tänka på hur man tänker. Det räcker inte att man gör, man måste också reflektera över det man gör. På det sättet stimuleras tankeverksamheten, men också nyfikenheten.

Min åsikt är att läraren måste bli medveten om att eleven ska lära sig använda symbolerna samtidigt som de lär sig begreppen. Man måste öva sig på att formulera sina tankar utan att använda symboler innan man övergår till det för matematiken karakteristiska sättet att skriva komplicerade sammanhang oerhört kortfattat.

Jag anser att undersökningen har gått som planerat med undantag av att jag från början tänkt mig att intervjua flera elever. Orsaken till att det inte blev riktigt som jag tänkt mig var tidsbristen. Det tar längre tid än man tror att prata individuellt med eleverna.

I det redovisade insamlade materialet redovisas inte min analys i samband med informella samtal och klassrum observationer. Det bör också noteras att utfallet av observationerna och de redovisade elevsvaren i enkäterna skall läsas med stor hänsyn till att inga korrelationer mellan valet av program och deras olika förutsättningar förekommer i min redovisning av studien. Studien begränsas också i urvalet av undersökningsgrupp. Så här i början av min undersökning kan jag inte dra några mer djupgående slutsatser. Jag hoppas att jag fortsätter med mina studier och kan få ännu bättre bild av elevernas utveckling i åk 2.

Referenser

Bergsten, C., Häggström, J.& Lindberg, L., (1997), *Algebra för alla,* Nämnaren Tema, Göteborgs Universitet.

Biehler, R. et al., (1994), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline,* Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H., (1994) , *Notation mathématiques,* Encyclopedia Universalis, Paris.

Frances R. Curcio, Barbara Nimerofsky, Rosanna Perez och Shirel Yaloz, (1998), Utvecklande problem, *Nämnaren nr. 3,* s. 14 - 20.

Frances R. Curcio & Sydney Schwartz, (1998), Förskolebarns algebraiska tänkande, *Nämnaren nr. 1,* s. 15 - 20.

Gerd, B. Arfwedson, (1992), *Hur och när lär sig elever ?* ,Stockholm, HLS Förlag.

Grevholm, B. & Wennström, T. (1999), *Samverkan högskola - skola II, Nämnaren nr. 4,* s. 36 - 39.

Grevholm, B., (2000), *Kursplaner i matematik,* Skolverket, Stockholm

Hurwitz, M., (1990), Writing restores meaning to symbols, *Mathematics Teacher*.

Högskoleverket, (1999), *Räcker kunskaperna i matematik ?* Rapport.

Julo, J., (1995), *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques,* PUR, p.97.

Liv Sissel Grønmo, (1999), En bokstav kan säga mer än tusen ord, *Nämnaren nr. 4,* s. 20 - 26.

Liv Sissel Grønmo, (1999), Att sätta ord på algebra, *Nämnaren nr. 1*, s. 19 - 25.

Liv Sissel Grønmo & Bo Rosén, (1998), Att förstå algebra, *Nämnaren nr. 4,* s. 35 - 41.

Liv Sissel Grønmo & Bo Rosén. (1998), Att tänka algebraiskt , *Nämnaren nr. 1,*

s. 46 - 49.

MacGregor, M.Stancy, K.Pegg, (1994), *Pattern, Order and algebra,* Australian Association of Mathematics Teachears Inc.

Malmer, G., (1999), *Bra matematik för alla*, Lund, Studentlitteratur.

Mercer, N. , Edwards, D., (1981), *Ground rules for mutual understanding I*, N.Mercer red., London.

Persson, P. ,Wennström, T. (1999), *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse*, Tsunami, nr 1, 2003 (Rapport Högskolan Kristianstad.)

Persson, P. , Wennström, T. (2000), *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse*, Tsunami, nr 2, 2003 (Rapport Högskolan Kristianstad.)

Rumelhart, D.E., Norman, D.A. (1976), *Accretion, tuning and restructuring: Three modes of learning,* San Diego, CA, University of California, Technical Report # 63.

Steiner, G., (1988), *Lernen Zwanzig Szenarien ans dem Alltag*, Bern : Huber.

Sutherland, R. , (1989), Providing a computer- based framework for algebraic thinking, *Educational Studies in Maths*, 20(3), s. 317-344.

TIMMS (1998), *Rapport 145 Skolverket,* Stockholm.

Constanta Olteanu
Chapmanskolan Karlskrona

Bilaga 1

Diagnostiskt prov i algebra för åk 1

Provet bygger på att undersöka elevens förkunskaper i algebra och deras förståelse för matematiska språk och symboler.

1. Skriv med hjälp av matematiska symboler:

a) Summan av x och 3 ……………………………….

b) Produkten av x och 3 ……………………………….

c) Produkten av 6 och summan av x och 3 ………………………………..

d) Summan av 6 och produkten av x och 3 ………………………………..

e) Inverterade talet till b ………………………………..

f) Produkten av a och kvadraten på b ………………………………..

2. Skriv med vanliga ord:

a) $A = a^2 + b^2$ A är lika med …………………………………… ……………………………………….

b) $B = 3(a + 4)$ B är lika med……………………………………… ……………………………………….

c) $C = 4 - 3x$ C är lika med………………………………………

3. Vi har följande omvandlings maskin:
Vilket resultat ger maskinen i följande situationer :

a — motsatt → - a

3 — motsatt →

3x — motsatt →

3 + x — motsatt →

2x - 3 — motsatt →

-4x+3 — motsatt →

-7x- 2 — motsatt →

3. Lös följande ekvationer:

a) $4x - 12 = 0$
…………………..................

b) $2 - 3x = 0$
…………………..................

c) $\frac{x}{3} = \frac{4}{7}$ …………………..................

d) $3x + 4 = x - 8$ …………………..................

5. Förenkla:

$2a + 3a$	
$12 - a + 8 - b + 5 - 2b + 11 + 4a$	
$a \cdot a - a$	
$3x \cdot 2x$	
$3(2a)$	
$(-4b)(3b)$	
$5(-3c)$	
$5(4 - x)$	
$27 - (x - 13)$	
$2x - 3 - (x - 4)$	
$x - (-2x + 3) + (4 + x)$	

6. Välj rätt svar för varje fråga i följande tabell. Det kan vara 0, 1 eller flera rätta svar.

	a	b	c	d	e
x^2 är lika med	$x + x$	$2x$	$x \cdot 2$	$x \cdot x$	$x^3 - x$
$x + x$ är lika med	$x + 2$	x^2	$x \cdot x$	$2x$	$x(1 + 1)$
$x - 1 + 2x$ blir	$3x - 1$	$2x + 3$	$-x - 1$	-1	$x + 1 - 2x$
$x - 3(x + 1)$ blir	$-x + 3$	$-x - 3$	$1 - x$	$-1 - x$	$-3 - x$
$3x + 4x$ är lika med	$12x^2$	$12x$	$7x$	$7x^2$	$3(x + 4)$
I uttrycket $6x + 9$ är det naturligt att bryta ut	3	2	-3	-2	7
$a(a + 1)$ är lika med	$2a$	$a^2 + 1$	$a^2 + 2$	$a^2 + a$	$2a + a$

Hälften av a är lika med	a/2	2/a	$\frac{1}{2a}$	0,5a	$\frac{1}{2}a$
$(x + 9)^2$ är lika med	$x^2 +9$	$x^2 +81$	$(x + 9)(x + 9)$	$x^2 + 81 + 18x$	$x^2 + 81x +18$

Enkät Matematik - Algebra

1. Hur tror du att dina kunskaper var i algebra i slutet av nian? Förklara kortfattat.
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………….

2. Vi har redan gått genom algebra i matematik. Har det skett några förändringar i dit sätt att se på algebra? Förklara kortfattat.
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………

3. Vilket var det svåraste att lära dig? Varför ?
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………

4. Använder du det algebraiska språket oftare och även i andra ämnen än matematik ?

………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………

5. Vidgade detta i så fall din förståelse, eller gjorde det också de andra ämnen till en början svårt ?
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………

6. Vad använder du för teknik när du löser uppgifter i algebra?
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………

7. Kan vi bli effektivare?
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………

Utprövning av prov för G i matematik år 9.

Pojke ☐
Flicka ☐
Betyg höstterminen ☐

M: Linjal, gradskiva

Taluppfattning

1. Storleksordna "stigande"

a) 1,44 1,8 1,5 1,755 Svar:

b) -5 -10 8 4 Svar:

c) 1/2 -3/4 1/3 1/5 Svar:

2. Hur mycket är

a) 0,5 * 80 = Svar:

b) 70 / 0.5 Svar:

Överslagsräkning

3. Ringa in det svar som passar bäst.

a) 50 * 305	1 500	15 000	30 000	150 000
b) 410 / 2	20	200	400	2000
c) 680 - 370 − 100	200	300	400	900
d) 1,3 * 11	2	13	20	100
e) 23 / 0,95	5	25	30	50

Procent med huvudräkning

4. a) 10 % av 650 kr =
b) 50 % av 2000 kr =
c) 25 % av 800 kr =
d) 1 % av 400 kr =

Procent med penna

5. Hur många procent är

a) 20 kr av 200 kr? Svar:

b) 150 kr av 600 kr? Svar:

c) 25 kr av 100 kr Svar:

d) 1 / 4 ? Svar:

e) 0,14 ? Svar:

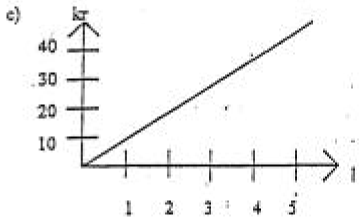
Proportionalitet i huvudet

6. Fem kilo apelsiner kostar 40 kr. Vad kostar

a) 6 kg ? Svar:

b) 0,5 kg ? Svar:

c)

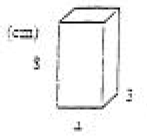


Du köper 4 liter bensin. Vad kostar det enligt detta diagram?
Svar:

Geometri

7. a) Rita här bredvid en *rektangel* med längden 3 cm och höjden 2 cm.
   b) Vilken omkrets har figuren du ritade? Svar:
   c) Vilken area har den? Svar:

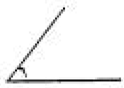
d) Rita här bredvid en *triangel* med basen 5 cm och höjden 4 cm.
e) Vilken area har triangeln du ritade? Svar:



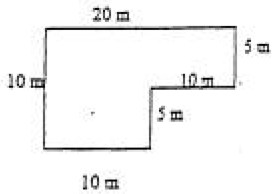
f) Vad kallas figuren till höger? Svar:
g) Vilken volym har den? Svar:

h) Vad kallas denna figur? Svar:
i) Hur stor är dess volym? Du kan använda formeln V = 3 * r * r * h
Svar:

j) Hur stor är denna vinkeln?
Svar:



k) Rita en vinkel på 100 °



l) Hur stor är figurens omkrets? Svar:
m) Hur stor är figurens area? Svar:

Enheter

8 a) Ett TV-program börjar 20.30 och slutar 22.20. Hur långt var programmet? Svar:

b) Ett nationellt prov skall ta 80 min. och dessutom ha en rast i mitten på 10 min.
Provet börjar 10.10. När skall det sluta? Svar:

c) 2,5 l = dl

3,5 kg = g

4 dm^3 = cm^3

6 dm^2 = cm^2

2,5 m = cm

5 dl = l

30 s = ______ min

Ritningar och kartor

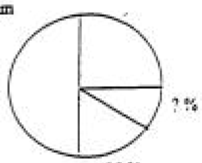
9 a) Hur lång blir en sträcka i verkligheten om den är 2 cm på en ritning i skala 1 : 100 ? Svar:

b) Hur lång blir en sträcka i verkligheten om den är 7 cm på en ritning i skala 1 : 100 000 Svar:

c) Hur lång blir en sträcka i verkligheten om den är 6 cm på en ritning i skala 2:1 Svar:

Tabeller och diagram

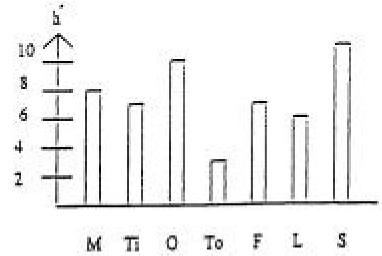
10. a)



Vad måste vara fel i denna uppgiften? Motivera!

Svar:

b)



Diagrammet visar antalet soltimmar under en vecka.

a) Vilken dag sken solen längst? Svar:

b) Hur många soltimmar var det då? Svar:

Sannolikhet

11. a) Hur stor är sannolikheten (chansen) att få en fyra när du kastar en tärning? Svar:

b) Hur stor är sannolikheten att få en fyra, femma eller sexa när du kastar en tärning? Svar:

Enkla formler och ekvationer

12.

a) $U = R \cdot I$ Använd denna formeln och beräkna U. Du får veta att R = 600 och I = 2 Svar:

b) Hur långt kör en bil på 1,5 h om farten är 80 km/h? Använd formeln $s = v \cdot t$ Svar:

c) Lös ekv. $5x + 2 = 22$ Svar: x =

d) Lös ekv. $2x - 10 = 40$ Svar: x =