Högskolan Kristianstad
Institutionen för matematik och naturvetenskap
Lärande och undervisning i matematik, 10 poäng
Vårterminen 2001

Vilka är elevernas svårigheter i algebra ?

En undersökning av hur gymnasieelever under
sitt andra år utvecklat sin algebraiska förståelse

Constanta Olteanu

Handledare: Barbro Grevholm

Förord

Detta är den andra rapporten, som presenterar resultat från en longitudinell undersökning av NV och SP -elever, som höstterminen 1999 påbörjade sina gymnasiestudier vid Chapmanskolan i Karlskrona. Avsikten med studien är att öka kunskapen om och förståelsen för elevens svårigheter med algebrainlärning. Det är viktigt att matematiklärare på alla stadier ser vilka aspekter som är viktiga att ta upp och behandla i den inledande matematikundervisningen och hur man kan arbeta med algebra eller prealgebra för att detta ska leda till en meningsfull inlärning.

Denna rapport kommer dels att beskriva elevernas begreppsbildning och begreppsutveckling inom algebra i åk 2 dels att fastställa hypotesernas riktighet från den första undersökningen.

Jag vill särskilt tacka till universitetslektor Barbro Grevholm, Högskolan i Kristianstad för mycket hjälp, uppmuntran och konstruktiv kritik under arbetets gång. Ett tack också till Gudrun Malmers Stiftelse som har möjliggjort dessa studier genom ett generöst stipendium.

Innehållsförteckning

Inledning

Den här rapporten grundar sig på data som insamlats under skolåret 2000/2001 och är en fortsättning av min första rapport ”Varför är skolalgebra svårt?” från 1999/2000.

I den föregående rapporten gav jag några synpunkter på algebraundervisningen. De framförda synpunkterna belystes av resultaten i en undersökning av ca 96 elever som just börjat sina gymnasiestudier i åk 1, på SP och NV-programmen. Undersökningens resultat finns redovisade i ”Varför är skolalgebra svårt?” Högskolan Kristianstad. Denna första rapport tar sikte på följande svårigheter i algebrainlärning:

- tolkning och översättning till matematiskt språk av välkända fraser
- negativa tal och minustecknets betydelse som beteckning för negativa tal, som beteckning för subtraktion och som beteckning för motsatt tal
- parentesers betydelse, osynliga tecken, symboler och vad symbolerna står för.

Avsikten med denna andra rapport är att ytterligare diskutera svårigheter med algebrainlärning främst för de elever som avser gå vidare på SP och NV-programmen.

Syftet med rapporten är inte bara att se hur elevernas prestationer ser ut utan också att förklara varför resultaten ser ut som de gör. Jag har inriktat mig på två olika grupper: en klass som läser på NV -programmet åk2 och en klass som läser på SP -programmet åk2. Sammanlagt deltog 60 elever i undersökningen.

Bakgrund

I flera tidningsartiklar i slutet av 1997 och början 1998 redovisades larmrapporter från landets tekniska högskolor om allt sämre matematikkunskaper hos de nyantagna studenterna. Senaste rapporten från gymnasieskolans kursprov är mycket dyster läsning, (Rapport om gymnasieskolans kursprov).

I Nämnaren nr. 4, 2000 kan vi läsa:

> *Vi ser med stor oro på utvecklingen av svensk matematikundervisning. Nya signaler om försämrade förkunskaper kommer från tekniska högskolor. Allt fler elever når inte upp till godkändnivån.* (s.1)

Efterfrågan från samhället på personer med matematikintensiva utbildningar är mycket större än tillgången, t ex inom naturvetenskap, teknik och datavetenskap. Goda kunskaper i matematik anses vara en viktig förutsättning för att kunna utveckla samhället:

> *Equally important to our nation's future is our children's proficiency in mathematics. For, in a world without math, the next generation of computers goes undeveloped, bridges and sky-scrapers go unconstructed, the Internet is shut down, and the opportunities of tomorrow are never realized. This summer, to equip our children with the math skills they need to achieve their full potential, my Administration launched a new mathematics initiative—the America Counts program.*
> (President Clinton's Call for Action, December 9, 1999)

Efter presentationen av delrapporten ”Varför är skolalgebra svårt?” (Olteanu,C. 2000) ville jag undersöka vidare dels elevernas begreppsbildning och begreppsutveckling inom algebra, dels i vilken grad elevernas kunskaper i algebra kan vara intressanta för deras förståelse av olika delar av matematiken och dels om mina hypoteser som ställs i den första rapporten kan vara riktiga. Jag ville också söka efter en bättre undervisning som är anpassad för de elever som har mest problem med algebra.

Området för min studie är algebra eftersom jag anser att goda kunskaper i algebra har stor betydelse för hur elever lyckas med matematikstudierna både i gymnasiet och på högskolan.

Min första rapport innehåller en mer detaljerad bakgrund till projektet (Olteanu,C. 2000).

Tidigare forskning

Algebra förekom långt tillbaka i tiden. Babylonierna under forntiden och araberna under medeltiden hade utvecklat algebra förvånansvärt långt. Det handlar då om ekvationer uttryckta med fullständigt utskrivna ord, ekvationer utan x och likhetstecken. Antikens greker lär ha varit de första som använde bokstäver för att beteckna tal. Den arabiska algebran kom till Europa på 1200-talet. Först omkring 1600 uppfanns variablerna. Den förste som systematiskt använde bokstäver som variabler var den franske matematikern François Viète.

Under 1600-talets första årtionden utvecklades det algebraiska språket snabbt. Till dem som bidrog till detta hörde den franske filosofen och matematikern René Descartes. Han insåg vilket effektivt redskap som matematiken hade fått i det algebraiska symbolspråket. Det algebraiska symbolspråket har en lexikal (ordlista) och en syntaktisk (grammatik) del. Den lexikala delen, kräver förtrogenhet med de symboler som svarar mot algebraiska begrepp och möjliga operationer medan den syntaktiska delen också kräver kännedom om de principer som används för att behandla algebraiska objekt. Det finns forskare som anser att det algebraiska språket kan bli en framtidsspråk:

The situation in algebra is made more interesting by spreadsheets, which have their own algebra. Possibly, in the near future, the language of spreadsheets will become the most commonly used algebraic language. (R.Biehler et al. ,1994, s. 321)

Algebrans kraft har reflekteras i utvecklingen av olika matematiska områden: geometri, funktionslära, differential– och integralkalkyl, osv. Många problem, som förut hade varit svåra att genomskåda och lösa, kunde man nu nästan mekaniskt lösa genom att operera med bokstäver och tecken. Trots detta finns det inte så mycket forskning om lärandet av algebra.

Det finns ingen allmänt accepterad definition av begreppet lärande. Lärandet kan till exempel beskrivas som ändring av beteende, tillägnande av ny kunskap eller som att uppnå ny förståelse. Detta kompliceras av att det inte finns någon entydig definition av begreppet kunskap. Inte heller finns någon generell syn på hur lärandet går till, i vilka situationer det kommer till stånd eller hur man med rimlig trovärdighet kan påvisa att inlärning har skett.

Bland teorier om lärandet som gör anspråk på att beskriva hur människor inhämtar kunskaper redovisas nu kortfattat några som utvecklats under 1900- talet och som är relevanta för matematikinlärning, speciellt för algebra inlärning.

Teorin med ursprung i slutet av 1800-talet - behaviorismen, är inriktad mot inlärningens resultat, beteenden, snarare än mot orsakerna till att inlärning uppstår. Därmed fokuserades forskares intresse till att studera hur lämpliga stimuli kunde ge upphov till vissa önskvärda uppträdanden som kunde befästas genom övning och positiv feedback, till exempel i form av beröm. Teorin har haft ett starkt inflytande på matematikdidaktikens utveckling. Höjdperioden för matematikundervisningens del började med publikationen av Thorndikens The Psychology of Arithmetic år 1922 (Romberg, 1993) och nådde sin kulmen med The Conditions of Learning (Gagné, 1965). Även om behaviorismen är en tillfredsställande modell för att beskriva inlärning av vissa enkla begrepp och färdigheter så är den helt otillräcklig för att förklara hur man upptäcker samband, bevisar satser eller löser komplexa problem.

Som ett svar på detta dilemma utvecklades en teori, *"Gestalt konstruktivism"*, som förutsätter att inlärning också innefattar ett element av aktiv konstruktion hos den lärande, inte enbart ett passivt anammande av vad omgivningen erbjuder. Gestalt teorin växte fram ur en europeisk tradition inom psykologin (Resnick & Ford, 1981).

Den så kallade utvecklingskonstruktivismen, växte fram för att förklara hur det kan komma sig att en och samma människa vid olika åldrar konstruerar skilda innebörder utgående från samma omgivning. Förklaringen, som till stora delar krediteras Jean Piaget, bygger på biologisk grund. Att inlärning i Piagets mening ägt rum kan konstateras i samtal med barn medan de arbetar med förelagda problem, en metod för kunskapskontroll som var bekant för många lärare. Den är tidskrävande men användbar och kvalitativt effektiv på alla stadier.

Dialektisk konstruktivism hävdad av bland andra Vygotsky kontrasterar mot Piagets teori (Novak, 1998). Förändringar främst i elevens språkliga utveckling, är en funktion av en dialektisk syntes av vederbörandes omgivning och av de handlingar som utförs. Tecken på att inlärning skett kan fångas på likartat sätt som enligt Piaget, nämligen i intervjuer med individen själv.

I konstruktivismens olika varianter är mycket av innehållet likartat men med många underavdelningar. Två stora intressesfärer kan urskiljas, nämligen intresset för epistemologi och för inlärningsteorier inklusive kognition.

Den betydelse som viss psykologisk forskning haft för förståelsen av hur matematikinlärning går till kan sammanfattas i två områden som är väsentliga, nämligen forskning om minnet och om effekter av kontext på det logiska tänkandet (Bell, Costello och Küchemann, 1987). Korttidsminnet spelar en bestämd roll för huvudräkning. Detta innebär inte att korttidsminnet blir "fullt" utan att arbetet, huvudräkningsuppgiften kräver så lång tid att minnets innehåll börjar vittra och de tidigare detaljerna inte längre finns tillgängliga när arbetet når sin slutfas. Därutöver ersätts också hela tiden existerande minnesfragment med nya som kräver plats i korttidsminnet.

Forskningsrapporter från 1970-talet, visar att logiskt tänkande som utgår från en välkänd miljö är annorlunda och mycket lättare än formell logik. Studier har enligt Bell, Costello och Küchemann (Bell, Costello och Küchemann, 1987) visat att elevernas prestationer i logiska arbetsuppgifter går att positivt påverka. För yngre barn är dock förbättrade resultat mer en följd av att man lärt sig vissa principer än att man verkligen fått insikt i uppgifternas logiska struktur.

Begreppskunskap (conceptual knowledge) beskrivs (Novak,1998) som ett nätverk av kunskaper. När information konfronteras med tidigare kunskap innebär det en påverkan av den begreppsliga kunskapen. En beskrivning av att ny matematisk information på ett relevant sätt har knutits till befintlig kunskap är att förståelse (understanding) har etableras. Den processen kallas av den amerikanske psykologen David Ausubel meningsfull inlärning (Ausubel,1968). Vid meningsfull inlärning relaterar eleven materialet till sina redan befintliga kognitiva strukturer.

I den internationella matematikdidaktiska diskussionen har konstruktivistiska idéer alltmer vunnit terräng och även om inte alla delar dessa idéer är det omöjligt att inte på något sätt förhålla sig till dem. Det är därför jag anser att för att utveckla nya tankestrukturer i inlärning av algebra krävs en viss mognad (Piaget, 1964) hos eleven. Denna mognad anger möjligheterna, men är inget som disponerar till ett visst tänkande. Strukturen är inget mentalt objekt hos en individ utan det sätt på vilket operationerna organiseras.

Konstruktivismen utgår från två grundläggande utgångspunkter, nämligen:

- att kunskap konstrueras aktivt av det lärande subjektet. Kunskap är inget som passivt mottas från omgivningen, samt
- att lärandet är en adaptiv process, som organiserar det lärande subjektets erfarenhetsvärld.

Erfarenheter av olika fenomen och företeelser i omvärlden är av stor vikt för tankestrukturernas utveckling. Piaget skiljer mellan olika former av erfarenhet som ger upphov till *empirisk kunskap* och *logisk- matematisk kunskap* (Piaget, 1964). Den empiriska kunskapen har sin grund i abstraktioner av observerade egenskaper hos objekten (i algebrans miljö kan betyda tal). Den logisk – matematiska kunskapen däremot grundas genom en *reflektiv abstraktion* som avser relationer mellan objekten, t ex tal. Piaget ägnade en stor del av sitt forskarliv åt undersökning av barns befintliga kunskaper och deras sätt att förstå abstrakta begrepp. Sentida kognitiva forskare har både anknutit till och avvikit från Piaget. Det fanns redan på 70- talet en mängd psykologisk litteratur, som demonstrerade den tidigare kunskapens betydelse för inlärning.

Norman och Rumelhart (1976) heter två amerikanska forskare som närmare har preciserat strukturbegreppet och utvecklat piagetiska idéer om förändringar i kunskapen. De anser att kunskap i algebra är strukturerad i form av s k *schema* (R. Biehler et al, 1994, s.247) .

Gerard Steiner (1988) studerade hur elevens kunskap och förståelse utvecklas genom ”repetitioner” och ”restrukturering”. Han säger:

> *Science transformative treatment is, as we have to be aware of, not a content but definitely a cognitive, process-bound procedure, the application of the progressive transformation type of teaching as well as a possible generative teaching for gifted students has to take place with any algebraic- mathematical content from the very beginning of arithmetic teaching up to the highest forms of mathematics education in secondary schools and colleges* (R. Biehler et al, 1994, s.259) .

Problem och frågeställningar

Goda algebraiska kunskaper, både i vad gäller färdigheter och när det gäller förståelse kräver lång tid och aktiva insatser från elever. Många elever uppfattar algebra som ett spel med en samling regler, ofta meningslösa och svåra att förstå.

Det främsta syftet med varje form av inlärning, utöver den tillfredsställelse den kan skänka, är att den ska vara oss till nytta i framtiden. När vi lär oss något bör detta inte bara innebära ett framsteg; det bör tillåta oss att senare med större lätthet göra ytterligare framsteg (Bruner, 1970 s. 32).

Utifrån detta och de problem som jag visade i min första rapport har jag ställt mig följande frågor:

- Varför finner många ungdomar det svårt att förstå sig på bokstavssymboler, även om de t ex valt NV-programmet?
- I vilken utsträckning räknar eleverna på olika program med formler och algebraiska förenklingar?
- Hur kan man skapa förståelse och motivation för att använda bokstavssymboler?

Plan för projektet och metod

Undersökningen har genomförts genom att använda både kvalitativa och kvantitativa metoder. Det som styrde valet av metod var i första hand syftet med den aktuella undersökningen och de frågeställningar som undersökningen förväntas ge svar på. Det finns många metoder man kan använda för att samla in data i en undersökning. Ingen metod är i sig bättre eller sämre än någon annan.

Min undersökning är av typen före- efter design utan kontrollgrupp (C.Svenning, 1999, s. 79) och vid urvalet av elevgrupper som skulle delta i undersökningen utgick jag ifrån mina matematikgrupper, vilket innebär att stickprovet är slumpmässigt. De elever som deltog var drygt 60 elever varav 28 som läser i åk 2 på NV- programmet och 32 på SP-programmet.

Datainsamlingarna genomfördes under augusti 2000 till februari 2001. För att kunna göra en meningsfull jämförelse av resultat på de diagnostiska proven och för att kunna förklara de skillnader som uppstår mellan olika begrepp, samlade jag in en mängd bakgrundsinformation genom att använda både kvantitativa och kvalitativa metoder. Prov, enkät och intervju bokades in i förväg vilket innebar att eleverna i klassen inte blev överrumplande.

Idén med denna undersökning var att utgående från en utvärderingsuppgift successivt bilda en svit uppgifter (Ekenstam & Nilsson, 1979) där varje nytt exempel erhålls ur det närmast föregående genom att en svårighet togs bort. Den sista uppgiften skulle vara så lätt att nästan alla klarade den. Uppgifterna inom varje svit delades upp på olika prov så att de elever som deltog inte mötte uppgifter i bara <u>en</u> svit utan uppfattade de förelagda uppgifterna som helhet oberoende av varandra (se bilaga 4). Ett traditionellt matematikprov mäter i allmänhet faktakunskaper i mycket högre utsträckning än vad det mäter någonting annat. Detta är i korthet anledningen till att jag kände ett behov av att bokföra elevens framsteg i en annan form. Dels ville jag få bort den vanliga provstressen som är vanlig bland elever, inte minst inför matematikprov, dels ville jag försöka mäta de saker som normalt inte mäts: begreppsförståelse, förmåga att hantera ”annorlunda” uppgifter.

Totalt fanns 120 uppgifter varav 16 utvärderingsuppgifter. De sist nämnda presenteras i bilaga 2, och av de 120 små uppgifterna ska jag presentera de som var intressanta med hänsyn till fortsättningen.

Avsikten med undersökningen var att upptäcka de svåra stegen samt att utröna hur långt eleverna kom i sådana sviter, och på det viset få en diagnos av färdigheterna. Efter att ha arbetat med de svåra stegen i varje svit och intervjuat eleverna om varför de gjorde respektive fel har jag på nytt testat eleverna.

Meningen är att diagnosen ska leda till bättre algebrainlärning genom att kartlägga de grundläggande färdigheterna i aritmetik och algebra. Mina ambitioner är att:

- nå bättre testresultat
- skapa en helhetsbild vad gäller det algebraiska symbolspråket

- skapa förståelse för osynliga tecken
- skapa kvalitativa förändringar vad gäller de algebraiska resonemangen
- få bättre uppfattning av algebrans kraft

Efter sista testet fick eleverna besvara en enkät (bilaga 3). Enkäten har kompletterats med intervjuer.

Frågorna var utformade på samma sätt men där de berörde ämnesinnehållet skilde sig enkäterna åt eftersom NV- eleverna läser matematik C och D i åk 2 , SP-eleverna läser matematik B. Frågorna var öppna, utom några få där det gällde att rangordna alternativ. De frågor som har öppna svar behandlas separat. Svaren för varje öppen fråga listas för överblickens skull. Likartade svar får därefter en gemensam presentation.

Elevenkäten bestod av fyra delar som behandlade följande områden:

- elevernas bakgrund
- undervisningsmetoder
- inlärningstillfällen
- användning av algebraiska kunskaper i olika ämne

Totalt 60 elevenkäter har kopierats. 2 av dessa besvarades inte, vilket ger ett generellt bortfall på ≈3%. På frågan om hur många timmar (60 min) per vecka de brukar ägna åt att arbeta med matematik uppgår bortfallet till bortåt 16 %, i övrigt är det i regel mindre än 8 %. För analyser och sammanställning av resultat har Excel används.

Den bandade intervjun tog 20-30 minuter och kretsade kring följande frågor:

- ramar som styr och begränsar
- likheter och skillnader mellan aritmetik och algebra
- algebrans kraft

Syftet med intervjun var att skärpa mina frågeställningar. Intervjuerna utvecklades stundom till spännande samtal fyllda med tankeställare och aha- upplevelser för båda parter. Det faktum att intervjuerna delvis fick styras av intervjuarens nyfikenhet och intervjupersonens böjelser bidrog till att öka rikedomen i undersökningsmaterialet.

Under arbetets gång har jag antecknat ett antal observationer för att försöka utröna vad som är problematiskt inom algebra. Jag har i stort sett använt elevens anteckningar eftersom jag tycker att det kan vara mycket avslöjande läsning att ta del av dem, och det kan ge klara indikationer på om eleven intresserat sig och hur han har förstått.

Jag vill också presentera elevernas resultat på det Nationella provet i matematik vt-1999 och ht-2000 som visar att mina hypoteser från den första rapporten rättfärdigas. Jag kommer att analysera elevernas resultat genom att ta hänsyn till hur deras algebraiska kunskaper och förmåga att generalisera har använts vid lösning av olika uppgifter.

I sökandet efter en metodik för att analysera elevernas utveckling inom algebra var det naturligt att gå till forskning om begreppsbildning och meningsfullt lärande (Novak & Gowin, 1994). Baserat på Ausubels forskning (Ausubel, 1968) och epistemologiska argument utvecklade Novak & Gowin två metakognitiva verktyg för meningsfullt lärande, *begreppskartor och Gowins kunskaps -V*.

Enligt Novak (1998) bör begreppskartan vara ett hierarkiskt ordnat nätverk av meningsfulla påståenden av typen {begrepp}-{relation}-{begrepp}. Utifrån detta och en av Barbro Grevholms begreppskartor (Grevholm, B. 1998, s.16) har jag konstruerat en begreppskarta inom algebra som hjälper mig att strukturera elevernas begreppsbildning och utveckling (bilaga 1).

Jag tycker att det är viktigt att skilja på kvantitativa och kvalitativa delar i diagnoser. Den förstnämnda syftar till att påvisa att åtgärder behöver sättas in och den sistnämnda bör resultera i riktade individuella åtgärder.

Resultat

Nationella kursprov

Nationella kursprov i den gymnasiala utbildningen erbjuds skolorna under vårterminen 2000. Vårens A-kursprov bestod av tre delprov. Del I innehöll kortsvarsuppgifter för bedömning av taluppfattning, matematisk symbolhantering och algebra. Miniräknare var ej tillåten på denna del. Uppgifterna i Del II och Del III var samlade kring temat ”Öresundsbron”. B-kursprovet bestod av två delar. Till de flesta uppgifterna räckte inte ett svar utan eleverna har redogjort för sin tolkning av uppgiften och sina tankegångar om hur den löses.

Totalt deltog 64 elever i A-kursprovet och 64 elever i B-kursprovet. I tabell 1 redovisas de program och de provbetyg eleverna fick jämfört med resultatet för ett riksrepresentativt urval. Betygsfördelning på kunskapsprovet presenteras i procent.(Gymnasieskolans kursprov vt 2000, Skolverket)

tabell 1

Program	Provbetyg A-kursprov				Hela riket			
	IG	G	VG	MVG	IG	G	VG	MVG
NV	0	19	50	31	3	27	44	25
SP	3	63	25	9	28	53	16	3

Program	Provbetyg B-kursprov				Hela riket			
	IG	G	VG	MVG	IG	G	VG	MVG
NV	3	44	37	16	13	38	34	15
SP	13	50	25	7	36	50	12	2

Höstterminen 2000 deltog 28 elever från NV- programmet i C-kursprovet. I tabell 2 redovisas deras resultat.

tabell 2

Program	Provbetyg C-kursprov			
	IG	G	VG	MVG
NV	3	44	33	20

Elevernas lösning på de flesta uppgifter som ingick i nationella kursprovet i matematik visar att de har ett utvecklat algebraiskt tänkande. Genom att kunna använda formler, tabeller, diagram och det algebraiska språket var det möjligt för eleverna att upptäcka enkelhet och struktur i vissa komplexa sammanhang och generalitet ur det enskilda fallet.

Jag skulle gärna vilja exemplifiera mina påståenden men beträffande hanteringen av de nationella kursproven hänvisar Skolverket generellt till bestämmelserna om sekretess i sekretesslagens 4 kap 3§. Att exemplifiera med liknande uppgifter är svårt eftersom det var själva formuleringen och tolkningen av de uppgifterna som var viktig och som skilde en elevs prestation från väl godkänd nivå och mycket väl godkänd.

Det presenterade resultatet och elevernas svar på frågan 11 i enkäten visar att mina hypoteser var riktiga, och stärker mina påståenden att goda kunskaper i algebra har stor betydelse för hur elever lyckas med matematikstudierna i gymnasiet. Det utgör dessutom ett verktyg för tänkande.

SP -programmet

I åk 2 läser eleverna på SP- programmet matematik B. Vi började studera algebra i augusti-2000 och vi kommer att läsa olika moment t o m januari månad. I min klass har jag 11 av mina elever från åk1 och 21 nya elever som har läst matematik A med olika lärare. Detta är en följd av elevernas val till en specifik inriktning på respektive program. 32 elever deltog i testet.

Efter det första diagnostiska provet och några undervisningstimmar insåg jag att 12 av 21 elever som var nya i klassen fortfarande hade samma svårigheter som de elever som läste tillsammans med mig hade i åk 1, dvs begränsad uppfattning av negativa tal och minustecknets betydelse, tolkning och översättning till matematiskt språk av välkända fraser (t ex hälften av x), osynliga tecken samt likhetstecknets betydelse. Utifrån de svårigheterna började jag på nytt förklara de grundläggande begreppen som ligger mellan aritmetik och algebra.

Så småningom började jag testa eleverna på de 8 utvärderingsuppgifterna vid fyra olika tillfällen. Lösningsfrekvenserna i andelen rätt uttryckt i procent före och efter uppgifternas genomgång i varje svit var:

tabell 3

Nr	Utvärderingsuppgifter	Före	Efter
1	Förenkla så långt som möjligt: $(a + 2b)(a - 2b) - (a + 2b)^2$	25%	72%
2	Förenkla så långt som möjligt: $(3x +1)^2 - (x + 5)(x - 5) - 4x(2x - 1)$	19%	63%
3	Lös ekvationen: $\frac{2x-4}{6} = \frac{2x+3}{3}$	47%	82%
4	Lös ekvationen: $(2x - 2)(x - 1) - 3(x - 1) = 0$	41%	76%
5	Lös ekvationen: $(x + 5)(x - 5) - 5(x - 6) - x^2 = 0$	22%	84%
6	Lös följande ekvationssystem: $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ 3x - y - 4 = 0 \end{cases}$	47%	88%
7	Förenkla så långt som möjligt: $\frac{8a^2 + 12a}{4a + 6}$	12%	64%
8.	Förenkla så långt som möjligt: $\frac{8^{\frac{4x}{3}} \cdot 4^{2x+1}}{2^{8x}}$	3%	43%

Där variabeln procent rätt används har inte hänsyn tagits till uppgifternas svårighetsgrad.

Flera tidigare undersökningar har visat på stor osäkerhet hos eleverna beträffande förståelsen av enkla algebraiska manipulationer. Jag tror att det som orsakar problem för eleverna är den matematiska abstraktionsnivå i kombination med det logiska tänkandet och brister i sina aritmetiska färdigheter. I tabell 3 visar jag att elevernas förståelse för algebra blir bättre efter att jag ständigt har analyserat elevens fel och har försökt att hitta det som hindrar elevens inlärning. För att motivera mina elever för algebra har jag lyft fram det som fungerar bra så att eleven får klart för sig att allt inte är fel. I min undervisning har jag som lärare sett till att eleven förstått parentesers betydelse och osynliga tecken samt att reparera bristerna i talförståelse. För att hjälpa eleverna att inte tappa några delmoment av den logiska följden har jag anpassat undervisningen i algebra på den nivå på vilken eleven befann sig kunskapsmässigt. Trots detta finns det en del elever som behöver mer tid att förstå och reflektera över sina algebraiska kunskaper.

NV- programmet

På NV- programmet har jag fortfarande samma elever som i åk 1. Jag testade eleverna på de 8 utvärderingsuppgifter vid fyra olika tillfällen. 28 elever deltog i testet. Lösningsfrekvenserna i andelen rätt uttryckt i procent före och efter uppgifternas genomgång i varje svit var:

tabell 4

Nr	Utvärderingsuppgifter	Före	Efter
1	Förenkla så långt som möjligt: $\dfrac{8a^2+12a}{4a+6}$	48%	94%
2	Förenkla så långt som möjligt: $\dfrac{x^2-16}{x^2-7x+12}$	29%	80%
3	Lös ekvationen: $\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x+2}{2x}=\dfrac{x+3}{3x}$	62%	94%
4	Förenkla så långt som möjligt: $\dfrac{2x}{x-y}-\dfrac{4xy}{x^2-y^2}-\dfrac{x}{x+y}$	29%	74%
5	Förenkla så långt som möjligt: $\dfrac{\dfrac{3x}{1+x}-1}{1-\dfrac{3-x}{x+2}}$	15%	80%
6	Lös ekvationen: $500\cdot 1{,}09^x = 20\,000$	54%	96%
7	Lös ekvationen: $100\cdot x^5 = 5\,400$	60%	100%
8	Lös ekvationen: $\lg(x^2+1) = 1$	15%	96%

Där variabeln procent rätt används har inte hänsyn tagits till uppgifternas svårighetsgrad.

Tabell 4 visar att eleverna på NV –programmet har svårt att se att bråkstreck innebär en osynlig parentes och att det finns brister i deras grundläggande förståelse och förmåga att hantera bråk.

I syfte att utröna var eleverna körde fast och att överhuvudtaget studera vilka steg, som var speciellt svåra, gjorde jag en undersökning som utgjordes av en svit uppgifter där varje nytt exempel erhålls ur det närmast föregående genom att en svårighet togs bort. Både på NV –programmet och SP –programmet visade sig att en till synens mycket liten förändring av en uppgift kunde leda till att svårighetsgraden ändrades dramatiskt.

Jag kommer att presentera de svårigheter som var intressanta med hänsyn till fortsättningen av algebrainlärning.

I uppgifterna 1 och 2 (SP-program) hade de elever som missade den följande fel:
- i utvecklingen av $(a + 2b)^2$ eller $(3x + 1)^2$ visste inte eleven vad 2:an betyder
- vid utvecklingen angav eleven $2b^2$ respektive $3x^2$ i stället för $4b^2$ respektive $9x^2$
- glömde man dubbla produkten
- trodde man att $a \cdot a$ var lika med 2a
- har inte hanterat på rätt sätt tecknen -

I uppgift tre (SP och NV -program) visar det sig att förkortning (och förlängning) av algebraiska bråk ställer till mera trassel än kanske någonting annat i matematikkursen. Att förkortning innebär, att man dividerar täljare och nämnare med samma tal och att man vid förlängning multiplicerar täljare och nämnare med samma tal, är något, som måste upprepas mycket ofta. De elever som har klarat att få fram m.g.n., har svårighet att avgöra om man skall multiplicera täljaren med 2, 3 eller 6. Att lösa själva ekvationen efter förenkling verkar inte ställa till några problem.

I uppgift fyra (SP-program) kunde många elever inte omforma ekvationen till $(x - 1)(2x - 5) = 0$. De kunde tänka sig att bryta ut 2 men inte $(x -1)$. De flesta har valt att ta bort parenteserna och lösa en andragradsekvation.

Ekvationen i uppgift fem (SP-program) syftade på kvadrerings- och konjugatreglerna. Den ekvationen löses av många som tycker det är roligt att knåpa ihop det så det blir rätt. Men samtidigt kan tvivla: varför gör jag det? Det ligger så att säga i luften. En svårighet var att lösa andragradsekvationen som kommer fram eftersom koefficienten för x^2 inte var 1.

Att lösa ekvationssystemet (SP-program) ledde till följande svårighet: några elever har inte förstått likhetstecknets betydelse.

Både på NV och SP -programmen hade eleverna följande uppgift:

Förenkla så långt som möjligt: $\dfrac{8a^2 + 12a}{4a + 6}$

Den syftade på utbrytning och förkortning. Täljaren och nämnaren utgörs av en summa. Elever som missade den hade följande fel:

- eleverna förkortar 8 med 4 och a^2 med a
- eleverna förkortar 12 med 6

Eleven måste känna till viktiga egenskaper som finns hos tal samt hur man räknar med dem. Men det visar sig att eleven inte kan utnyttja sitt kunnande i aritmetik för att lösa det algebraiska problemet, om detta kunnande är osäkert eller svagt. Jag tror att det kan finnas något hopp att undvika ideliga fel vid förkortning, om man fastslår såsom regel, att i ett bråk, där förkortning skall företagas, först både täljare och nämnare skall vara uppdelade i faktorer, innan man sätter i gång att förkorta.

Den sista uppgiften på SP -programmet visar att eleverna har en uppfattning om att använda vissa begrepp (potenser) som bildats av en följd av erfarenheter, inom eller utanför klassrummet, men som aldrig fått någon mera precis definition. Ett sådant begrepp kallas *omedvetet bildat begrepp* (R.Biehler et al., 1994, s. 168). Hur mycket kunskap får man denna väg? Hur hållbara är på så sätt bildade begrepp?

Barn och ungdomar lär sig mycket av erfarenhet. Naturligtvis kan erfarenhetsgrundade, omedvetet bildade begrepp också bli rena missuppfattningar. Det finns t ex elever som tänker sig att $2^{-8x} = 0{,}02^{8x}$ förmodligen ett ” begrepp” bildat på erfarenheten att $10^{-2} = 0{,}01$.

På NV- programmet ger uppgifterna 2, 4 och 5 låga lösningsfrekvenser, men jag tror att de borde vara centrala för de elever som fortsätter sina studier på gymnasieskolans NV-program. Manipulationer av komplicerad typ som i uppgift 4 och 5 eller att uppdela i faktorer $x^2 -7x + 12$ borde kunna utgå till förmån för uppgifter som belyser det väsentliga i ”bokstavsräkningen” och tvingar fram bättre förståelse.

Andra orsaker till svårigheter var:
- att elever inte förstått den algebraiska syntaxen
- uttryck och ekvationer blandades ihop

Arbetar man med omskrivningar utan att tänka på innehållet är det förstås viktigt att följa ”reglerna”. I annat fall tappar uttrycken kontakten med det ursprungliga innehållet och resultaten blir fel.

Uppgifterna 6 och 7 har inte ställt till besvärliga problem. Den enda svårighet var att eleven inte insåg att man skulle frigöra $1{,}09^x$, respektive x^5.

Enkät

De tre frågor som hade ”ja” eller ”nej” som svarsalternativ och de fyra frågor som kunde leda även till ”vet ej” som alternativ redovisas i sammandrag. Argumenten för ”ja” eller ”nej” har fördelats på kvalitativa kategorier. Elevernas kommentar redovisas med svarsfrekvenser för olika kategorier senare. Här ges i sammandrag endast vissa resultat från de fria texter som följer på ett ”ja”, ”nej” eller ”vet ej”. De elever som svarar ”ja” på frågorna 10, 11 och 12, och sedan motiverar varför, svarar vanligen med att ange vissa ämnen som fysik, kemi, företagsekonomi eller med att beskriva algebrans kraft i olika situationer som ekvationlösning och bearbetning av formel eller också anger man vissa metodiska behov inom matematikundervisningen.

Har man svarat ”nej” så är argumenten sällan riktade mot ämnesinnehållet i de andra ämnena. Istället nämner man till exempel att de använder algebra om den fungerar.

Frågorna i enkäten var genomgående utformade för fritt formulerade svar. Tre varianter användes för att fånga upp deltagarnas synpunkter.

- I vissa fall, som i fråga 7,10, 11, 12, fick man svara ”ja” eller ”nej”, även ”vet ej” som i fråga 3 och 4, på en inledande fråga, därefter argumentera för sitt svar och lämna fria kommentarer.
- Andra frågor, som till exempel 2 och 9, förutsatte fri formulering inom specificerade områden med möjlighet att kommentera frågan.
- Den tredje möjligheten som i fråga 1 och 2, krävde ett utredande svar utan något inledande ”ja” eller ”nej”.
- Den fjärde möjligheten som i fråga 5, 6 och 8 har fasta svarsalternativ.

Bortfallet av data består i att två elever på SP -programmet inte har fyllt i enkäten och att vissa enstaka frågor är obesvarade. Det har två orsaker. För det första har vissa frågor genom enkätens struktur sorterats bort av den enskilde eleven såsom icke relevanta alternativ för fortsättningen. För det andra saknar man ibland en uppfattning i vissa frågor.

Frågor och svar

I redovisningen behandlas nu svaren i samma ordning som frågorna har i enkäten. För läsbarhetens skull används i redovisningen genomgående samma frågeformulering som i enkäten varvid frågetexter skiljs från övrig text genom användning av kursiv fet stil i avvikande typsnitt. Elevernas kommentarer skrivs med kursiv stil.

För varje svarsmöjlighet har svaren kategoriserats efter sina särskilda drag. Några för *alla* frågor gemensamma kategorier har inte framkommit. Ett övergripande mönster av kategorier har heller inte eftersträvats i analysen. För varje svarsmöjlighet redovisas de största svarskategorierna utförligt. Övriga representeras av ett urval exempel. Antalet svar anges för varje kategori. Procenttal beräknas hela tiden på antalet vid varje fråga avgivna svar eller kommentarer.

För varje fråga presenteras först totalresultaten och därefter presenteras eventuella skillnader i svar mellan elever på SP och NV –programmen.

<u>DelA</u>

1. ***Du har redan lärt en del algebra på A–nivå (SP-program) respektive A, B och C (NV-program). Hur tror du att dina kunskaper var i algebra i slutet av åk 1? Förklara kortfattat.***

Av de 30 elever på SP -programmet som markerat ett positivt svar uppger 15 elever (50%) att deras förkunskaper var bra, 11 elever (37%) skriver att deras förkunskaper inte var bra och 2 elever (7%) var osäkra. På NV-programmet är det 17 av 30 elever (57%) som uppger att deras kunskaper var bra och 13 av 30 elever (43%) som uppger att deras kunskaper var hyfsat bra.

Av dem som svarade är två kategorier tydliga, även om en av dem innehåller en rad blandade motiveringar. Exempel på sådana kategorier är:
42 svar anger hur mycket de har lärt i algebra
19 svar anger orsakerna till inlärning av algebra

Följande citat belyser hur argumenten som framförs ofta är resonerande till formen:

Jag hade bara en liten kunskap då med hur man löser ekvationer nu känner jag att jag kan mer (SP) .

Inte så bra, men nu har det blivit bättre för att läraren förklarar på ett bra och förståligt sätt (SP).

Sådär p g a jag missade många lektioner (SP).

Kändes som om jag kunde det och att det hade fastnat bra (NV).

Jag har lärt mig mycket algebra sedan jag slutade grundskolan, så det är klart att man kunde lite när man slutade åk 1 (NV).

2. ***Vilket var det svåraste att lära dig ? Varför ?***

De flesta elever, som lämnat en kommentar, beskriver förhållanden mellan algebra och de andra momenten som ingår i matematik. 10 elever av 30 på SP- programmet (33%) har inte någon uppfattning , 20 elever (57%) visar olika svårigheter. Fem kategorier dominerar på samhällsprogrammet.
2 kommentarer pekar på att ställa upp formel
4 kommentarer visar att alla moment var svåra
6 kommentar syftar på lösning av problem med hjälp av ekvationer
5 kommentarer pekar på negativa tal
3 kommentarer pekar på konjugat och kvadreringsreglerna

10 elever av 28 (36%) på naturvetarprogrammet skriver att de inte har några svårigheter. 15 elever av 28 (54%) tar upp olika svårigheter som kan kategoriseras i fyra dominerande kategorier och 3 elever (10 %) har inte någon uppfattning.

4 kommentarer pekar på tillämpningar
2 kommentarer pekar på konjugat och kvadreringsreglerna
5 kommentarer pekar på utveckling av vissa utryck
4 kommentarer pekar på derivatan

3. ***Har det skett några förändringar i ditt sätt att se på algebra ? Förklara kortfattat.***

1 elev av 30 SP- programmet (3%) svarar inte, 9 elever av 30 (30%) svarar att de inte tror att det har skett några förändringar, och 20 elever (67 %) visar att det har skett positiva förändringar. De elever som utrycker sig negativt lämnar ingen kommentar. Bland de 20 positiva svaren är följande kommentarer den vanligaste:

Man har blivit bättre på att tänka logiskt och metodiskt istället för att memorera formler.

Det är mycket mer logiskt.

Jag har från första början tyckt att det varit roligt och det har bara blivit bättre och bättre.

Det är roligare när man förstår.

På naturvetarprogrammet svarar inte 1 elev av 28 (4%), 3 elever (11%) tycker inte att det har skett några förändringar, och 24 elever av 28 (85 %) visar att positiva förändringar har skett. Elevernas kommentarer avslöjar både kvalitativa och kvantitativa förändringar:

Jag har förstått att det <u>inte</u> är meningslöst att lära mig algebra.

Japp, det är lättare att ta till sig algebra som ett hjälp medel i andra problem lösningar. Utan algebra hade det nog blivit mycket svårt att kunna gå vidare både med matte, fysik och kemi.

Oerhört, man ser bokstäverna och siffrorna på ett annorlunda sätt, man ser mönster och sammanhang.

Jag begriper vad jag gör och varför.

Algebra är inte längre något jag ser som jobbigt.

<u>Del 2</u>

4. ***Har genomgångarna i algebra bidragit till att Du förstår algebra bättre? Förklara kortfattat.***

2 elever av 30 (7%) SP- programmet svarar nej utan att lämna någon kommentar, och 28 elever (93%) svarar positivt med följande kommentarer.

Ja, jag hade inte förstått så mycket om jag bara hade läst i bocken. Jag tycker att genomgångar är bra.

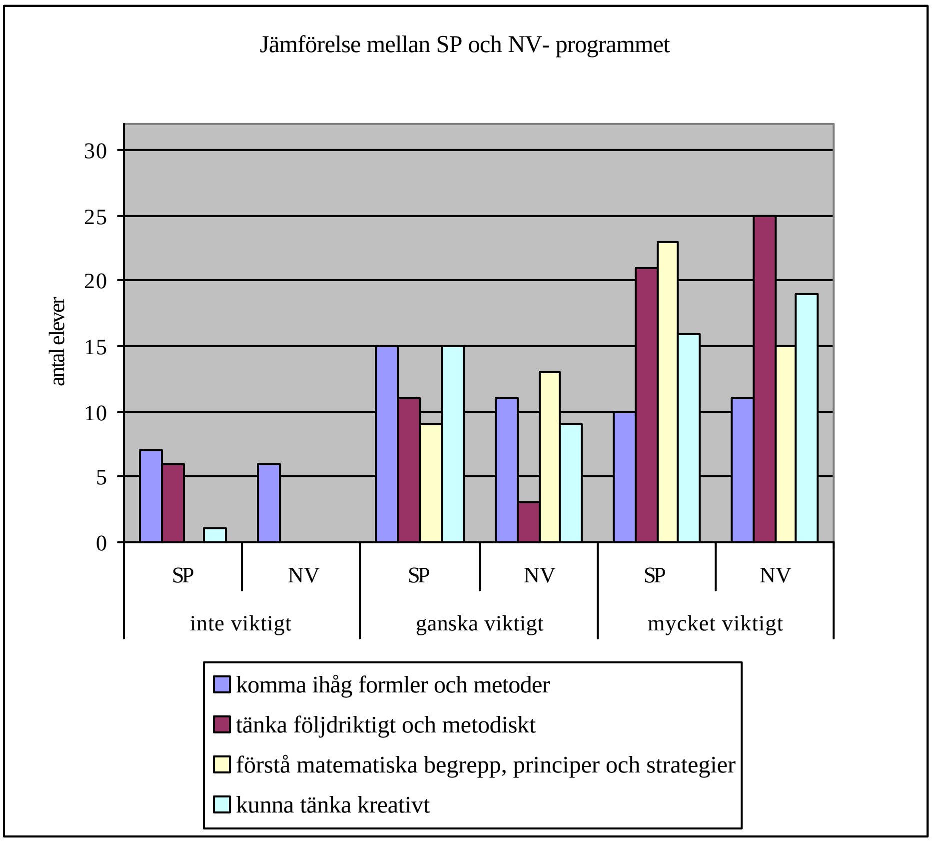
Ja, det är bra med genomgång, men det är jobbigt att man är så många i klassen.

Eleverna på NV-programmet svarar alla att genomgångarna har bidragit positiv till deras inlärning av algebra. De vanligaste kommentarerna är följande:
Tycker det är ett bra sätt att lära sig.

Ja, fast träning ger färdigheten.

Ja, efter varje genomgång känner jag mig säkrare och säkrare på algebra.

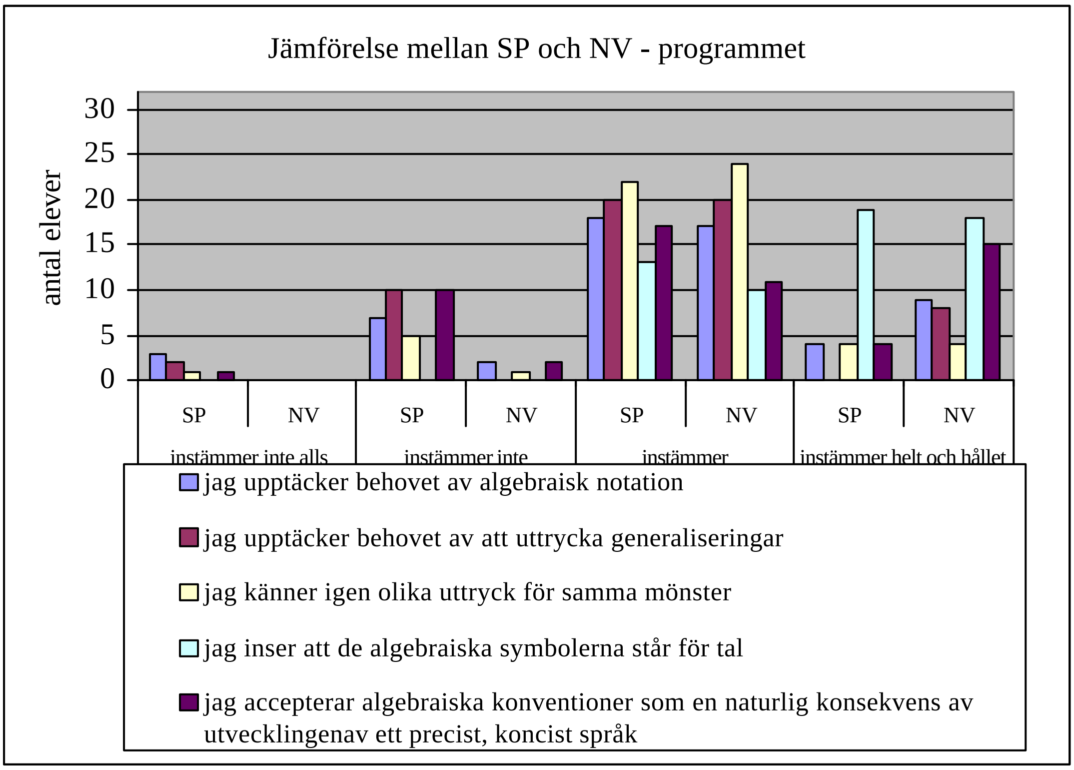
5. För att vara duktig i algebra i skolan hur viktigt tror Du det är att…



Att tänka följdriktigt och metodiskt, att förstå matematiska begrepp, principer och strategier, att kunna tänka kreativt uppfattas som mycket viktigt av den stora majoriteten av elever på NV -och SP –programmet. Att komma ihåg formler och metoder tillmäts inte samma betydelse.

6. I vilken utsträckning instämmer Du eller instämmer Du inte i vart och ett av följande påståenden ?

Resultaten i diagrammet nedan visar att eleverna på både SP -och NV -programmet upptäcker behovet av algebraisk notation. 28 elever av 28 på NV -programmet instämmer i detta och 21 av 30 på SP -programmet. Alla elever inser att de algebraiska symbolerna står för tal. Att acceptera algebraiska konventioner blev en ganska naturlig process för naturvetare elever. Alla 28 elever instämmer i detta. Detta är inte så naturligt på SP-programmet. 20 elever av 30 instämmer i detta. 27 av 28 elever på NV-programmet känner igen olika uttryck för samma mönster, liksom 24 av 30 på SP-programmet. Att upptäcka behovet av att uttrycka generaliseringar instämmer eleverna i på båda program i samma utsträckning.



<u>Del 3</u>

7. ***Tycker Du att det behövs mer tid till övning på enkla sammanhang inom algebra ? Förklara kortfattat.***

23 elever (77%) av 30 har svarat ja på SP - programmet och 9 elever (32%) av 28 på NV -programmet. 8 elever (27%) svarar nej och 1 elev (4%) på SP – programmet svarar att han inte vet. 21 elever (75%) av 28 svarar nej på NV -programmet.

För dem som svarat ja är tre kategorier relevanta.

8 elever (25%) av 32 kommenterar där:
Ja, man måste förstå det enkla för att klara det svåra.(SP)

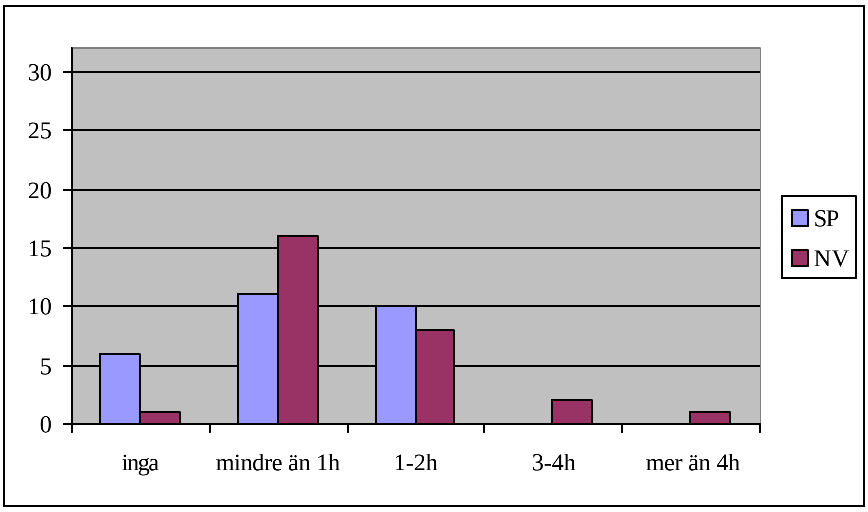
14 elever (44%) av 32 har som kommentar att:
Ja, en del kanske inte lär sig lika fort som alla andra.(SP)

10 elever (31%) av 32 pekar på att :
Det är viktigt att lära sig grunderna.(NV)

Av dem som svarat ”nej” finns det få kommentarer som syftar på att det är: ”Ingen idé att tjata för mycket om för enkla saker” (NV). De flesta ger ingen kommentar.

8. ***Hur många timmar (60 min) per vecka brukar Du ägna åt att räkna matematik utanför schemalagd tid ? Ringa in det svar som passar dig!***

5 elever (16%) av 32 på SP -programmet svarar inte.



Trots att det finns så många elever (72%) på SP- program som tycker att det behövs mer tid till övning på enkla sammanhang inom algebra visar sig det att elevernas egen inlärning i stor sett sker i skolan. Eleverna arbetar knappt hemma med matematiken. En förklaring till detta kan finnas i elevernas svar på nästa fråga.

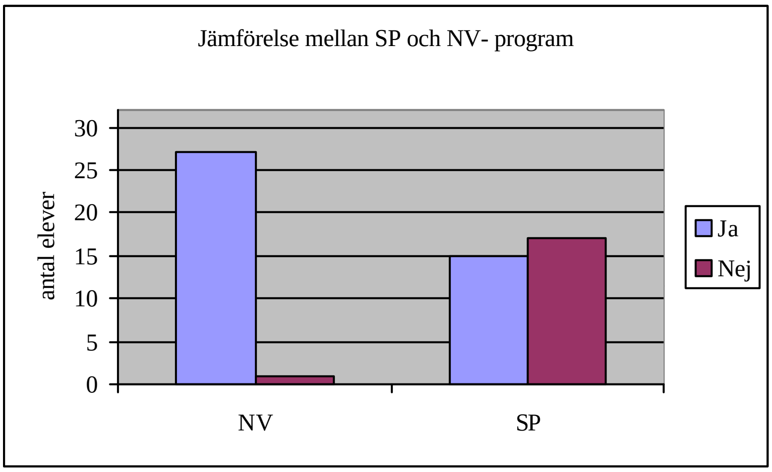
9. ***Vilka faktorer begränsar Ditt sätt att lära Dig algebra? Förklara kortfattat.***

5 kategorier är relevanta på NV -programmet.
5 elever (18%) av 28 anger att dåliga förklaringar i boken begränsar deras sätt att lära sig algebra. 3 elever (11%) pekar på trötthet, 4 elever (14%) förklarar att det är tidsbristen, 1 elev (4%) är omotiverad, och 2 elever (7%) pekar på bristande personligt intresse. 10 elever (36%) av 28 har inga svårigheter och 3 (11%) elever har ingen uppfattning.

4 kategorier är relevanta på SP -programmet.
5 elever (17%) av 30 visar att det blir för mycket på samma gång, 6 elever (20%) pekar på bristande intresse, 19 elever (63%) visar att det är brist av tid. Den vanligaste kommentaren är:
Inget mer än att man har så mycket i de andra ämnena att göra (SP).

Del 4

10. ***Använder du det algebraiska formelspråket i alla ämnen som utnyttjar matematik ?***



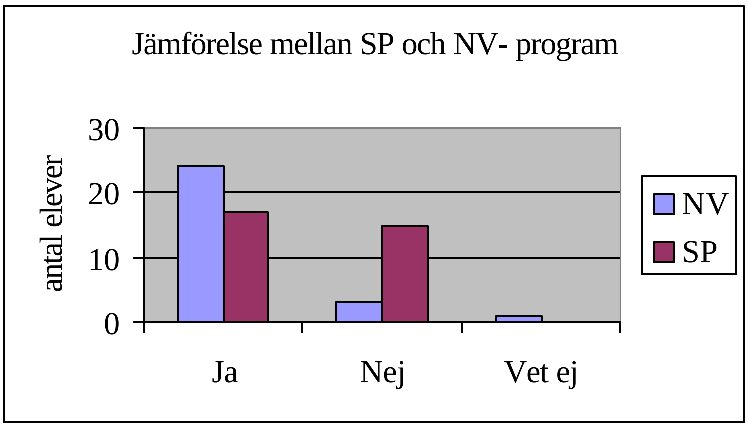
Resultaten visar att på NV- programmet använder eleverna rätt matematiskt formelspråk i de övriga ämnena men detta sker inte på SP- programmet. Detta innebär att algebra fortfarande är någonting abstrakt och oanvändbart på SP- programmet för de flesta elever. Elevernas vanligaste kommentarer var:

Ja, man har haft stor nytta av sina kunskaper i algebra i de övriga ämnen.(NV)

Ja, i företagsekonomi. (ibland) (SP)

Nä, vi läser inga andra sådana ämnen.(SP)

11. *Vidgar detta i så fall din förståelse i de andra ämnena ? Förklara kortfattat.*



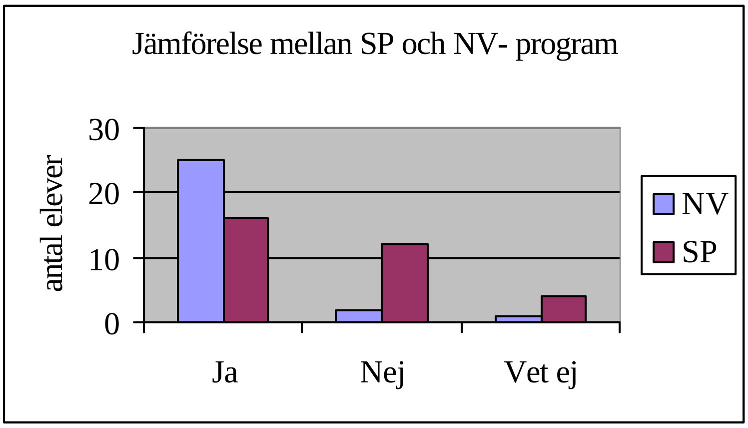
Det visar sig att de eleverna som använder rätt matematiskt språk i olika sammanhang kommer att ha det lättare i de andra ämnena. De vanligaste kommentarer var:

I många sammanhang blir allt lättare med algebra.(SP)

Algebra är ett sätt att tänka systematiskt, så jag använder nog algebra i många ämnen med systematiskt tänkande.(NP)

Absolut, utan algebra skulle man inte kunna klara matte kurserna ens till G- nivå.(NP)

12. ***Tycker Du att din förmåga att tänka algebraiskt har bidragit till att klara nationella provet i matematik? Varför?***



Vad jag vill lyfta fram med denna fråga, är att uppgifterna i algebra inte får ses som isolerade öar. Såväl uppgifterna som de tankeformer som används, måste kopplas till ett vidare sammanhang, till en kontinuitet i inlärningen. Detta leder till en annan konsekvens. För att ge eleverna en kontinuitet i utbildningen och för att kunna hjälpa eleverna med akuta problem, krävs kunskaper i matematikens didaktik.

Elevernas kommentarer kan sammanfattas med följande citat:

Många tal innehåller algebraiska lösningar.(NV)

Ja, eftersom algebra ligger till grund för allt matematiskt tänkande.(NV)

Ja, man förstår sammanhanget, bättre när man betecknar olika saker med x och y istället för en lång text.(SP)

Intervju

För att få en uppfattning om hur eleven faktiskt tänkt har jag gjort 8 intervjuer, fyra intervjuer med eleverna på SP -programmet och fyra intervjuer med eleverna på NV-programmet. De tre områden som behandlades är:

- ramar som styr och begränsar
- likheter och skillnader mellan aritmetik och algebra
- algebrans kraft

Samtalen tog olika lång tid beroende på hur den enskilde deltagaren utvecklade de fyra punkterna, i genomsnitt 20 minuter.

Några utvärderingsuppgifter från det skriftliga testet användes som underlag i samtalet. Nedan redovisas resultat från intervjuerna på NV och SP-program. I gruppen ingår följande elever: elev 1, 5 och 7, med svaga prestationer på algebratestet, elev 2 ,3 och 8 med medelgoda prestationer och elev 4 och 6 med goda prestationer. Elev 1,2 ,3 och 4 läser på SP-programmet och elev 5, 6, 7 och 8 på NV-programmet.

Intervjuerna utvecklades stundom till spännande samtal fyllda med tankeställare och aha- upplevelser för båda partner. Det faktum att intervjuerna delvis fick styras av intervjuarens nyfikenhet och intervjupersonens böjelser bidrog till att öka rikedomen i undersökningsmaterialet.

Frågan om intervjuerna ska skrivas ut fullständigt eller selektivt är kontroversiell inom forskning med kvalitativ metod. De teman som kom att ingå i rapporteringen bestämdes genom en växelverkan mellan materialets möjligheter och projektets frågeställningar.

Dataredovisningens trovärdighet måste bedömas på ett nyanserat sätt och relateras till författarens anspråk. Det vore befängt att tro, att studiet av 8 elever skulle besvara frågan om vilka svårigheter det finns i inlärningen av algebra. Däremot kan mönster i ett så begränsat material vara tillfyllest för att identifiera vissa svårigheter i algebra. Ibland behövs det inte mer än ett enskilt fall för att problematisera påståenden om elevens förståelse och uppfattning av algebra.

<u>Elev 1</u>

………………..
Intervjuare: Du har läst matematik A tillsammans med en annan lärare i Åk 1. Tycker du att det är bra att du har bytt lärare ?
Elev: Det är bättre eftersom jag förstår bra.
Intervjuare: Varför förstår du bättre nu?
Elev: Ja,….det var svårt att fatta förklaringarna från den andra läraren.
Intervjuare: Har ni jobbat mycket med algebra på matte A?
Elev: Vi har bara löst ekvationer.
Intervjuare: Har ni använt mycket på mattelektioner ord som: multiplikation, subtraktion, division, inverterade tal ?
Elev: Nä,…. inte så mycket som nu.
Intervjuare: Vi har läst algebra tillsammans i kurs B. Hur uppfattar du den ?
Elev: Det är kul men svårt!

Intervjuare: Titta på följande uppgift:
Förenkla så långt som möjligt: $(a + 2b)(a - 2b) - (a + 2b)^2$
Hur tänker du att gå till väga för att förenkla den ?
Elev: …(funderar några minuter)
Intervjuare: Om du hade istället $2 \cdot 3 - 5^2$ vad räknar du först ?
Elev: Gånger brukar vi räkna alltid före + och -.
Intervjuare: Vad gör du med 5^2 ?
Elev. Det spelar ingen roll vad man räknar eftersom 5^2 betyder $5 \cdot 2$.
Intervjuare: Är det 5^2 lika med $5 \cdot 2$?
Elev: Nej,….det blir 25.
Intervjuare: Om vi återkommer till vår uppgift vad tycker du att vi ska räkna först ?
Elev: Vi tar gånger mellan parenteser och sen använder vi den regel…..(kommer inte ihåg).
Intervjuare: Tycker du att det är svårt att räkna med bokstäver?
Elev: Ja.
Intervjuare: Varför tror du det?
Elev: Ja,…. jag kan inte riktigt koppla de med verkligheten.
……………………

Elevens svar på olika frågor visar att elevens problem är en följd av missuppfattningar från numerisk räkning. Orsaken till alla de fel eleven gör har inte med algebra att göra, utan har sin grund i vad eleven uppfattade om numerisk räkning. Genom att uppmärksamma orsaken till problemet blev det relativt lätt att rätta till det.

Elev 2

……………….
Intervjuare: Du har läst matematik A tillsammans med en annan lärare i Åk 1. Tycker du att det är bra att du har bytt lärare ?
Elev: Det är bättre nu.
Intervjuare: Varför?
Elev: Vår lärare följde de bästa i klassen utan att bry sig om de andra.
Intervjuare: Har ni jobbat mycket med algebra på matte A?
Elev: Nej, inte så mycket.
Intervjuare: Har ni använt mycket på mattelektioner ord som: multiplikation, subtraktion, division, inverterade tal ?
Elev: Så där….
Intervjuare: Titta på följande uppgift:
Lös ekvationen: $(2x - 2)(x - 1) - 3(x - 1) = 0$
Hur tänker du att gå till väga för att förenkla den ?
Elev: Jag gångar in parenteserna först.
Intervjuare: Vad är det för skillnad mellan att förenkla och att lösa en ekvation?
Elev: Ja,… förenkla är visst att bara räkna ihop alla.
Intervjuare: Vad menar du med att räkna ihop?
Elev. Ja, t. ex. x med x och x^2 med x^2 osv.
Intervjuare: Vad menar vi med en ekvation ?
Elev: Här ska vi lösa ut vad är okänt.
Intervjuare: Vad betyder svaret som du får fram ?
Elev: Ett tal som sätts in och ger svaret 0.
………………..

Jag konstaterar till att börja med, att eleven inte använder ett riktigt matematiskt språk. Eleven använder multiplikationsalgoritmen i stället för att använda en annan strategi för ekvationslösning. En orsak till detta kan vara att inlärningen var på ytnivå.

<u>Elev 3</u>

……………….

Intervjuare: Du har läst matematik A tillsammans med en annan lärare i Åk 1. Tycker du att det är bra att du har bytt lärare ?

Elev: Bra inga problem att byta lärare.

Intervjuare: Varför förstår du bättre nu?

Elev: Ja, ….det var svårt att fatta förklaringarna från den andra läraren.

Intervjuare: Har ni jobbat mycket med algebra på matte A?

Elev: Så där…..

Intervjuare: Har ni använt mycket på mattelektioner ord som: multiplikation, subtraktion, division, inverterade tal ?

Elev: Så där…

Intervjuare: Vi har läst algebra tillsammans i kurs B. Hur uppfattar du den ?

Elev: Det är att klura ut hela tiden!

Intervjuare: Titta på följande uppgift:
Förenkla så långt som möjligt: $(3x+1)^2 - (x+5)(x-5) - 4x(2x-1)$
Hur tänker du att gå till väga för att förenkla den ?

Elev: Ja, …först ska vi ta bort parenteserna.

Intervjuare: Vad menar du med detta?

Elev: Jag ska använda olika regler och jag ska tänka på minus tecknet.

Intervjuare: Och sen ?

Elev. Jag måste skriva det är svårt att förklara……..

Intervjuare: Ok du kan skriva.
Eleven skriver följande steg : $3x^2 + 6x + 1 - x^2 - 25 - 8x^2 + 4x$

Intervjuare: Du använder först kvadreringsregel. I formeln har du *a*. På vad syftar *a* i din uppgift?

Elev: 3x

Intervjuare: Vad blir 3x allt upphöjt till 2 ?

Elev: Om båda är upphöjda till 2 blir det $9x^2$.

Intervjuare: När du tog bort andra parentesen hur tänkte du?

Elev: Ah! Det är fel vi har minus före parentes och det blir +25.

Intervjuare: Vad vill du göra sen?

Elev: …(funderar lite)…..Förenklar det hela.

………………

Eleven har en viss struktur i hur uppgiften ska förenklas, men eleven kan inte använda relevanta matematiska ord. Eleven har fel på kvadreringsregeln och hanterar minus tecknet felaktigt. Om jag inte hade gjort den här intervjun och visat vad eleven gjort för fel hade det vara möjligt att eleven tappat tilltron till såväl diagnosens kvalitet och sin egen förmåga.

Elev 4

…………

Intervjuare: Vad tycker du om algebra?

Elev: Algebra är mycket viktigt, det används inom många områden som t. ex. fysik, kemi, osv.…

Intervjuare: Träffar du ofta på algebra i verkligheten?

Elev: Nä…..

Intervjuare: Har du någon nytta, i verklighet, av dina algebraiska kunskaper?

Elev: När jag läser tidningar så förstår jag bättre ordföljden i meningen, man förstår djupare, man förstår varför de skriver som de skriver…..

Intervjuare: Berätta för mig hur du löser följande uppgift:

Lös ekvationen: $\frac{x+1}{x}+\frac{x+2}{2x}=\frac{x+3}{3x}$

Elev: Jag skall multiplicera ekvationens första term med 6, den andra med 3 och sista med 2.

Jag tar bort parenteserna och förenklar det hela. Jag löser ekvationen.

Intervjuare: Kan x vara vilket tal som helst eller finns det vissa begränsningar ?

Elev. X ska inte vara 0.

Eleven visar på ett klart och tydligt sätt att han hanterar både matematiskt språk och resonemang på rätt sätt.

Elev 5

……………….

Intervjuare: Vad tycker du om algebra?

Elev: Algebra är mycket viktigt, det används inom många områden som t. ex. fysik, kemi, osv.…

Intervjuare: Har du någon nytta, i verklighet, av dina algebraiska kunskaper?

Elev: Jag har börjat att analysera mer olika texter som t. ex. i biologi eller olika statistiska resultat som redovisas i tidningar. Jag har börjat att fundera mer.

Intervjuare: Tycker du att det är viktig att börja med algebra tidigt ?

Elev: Ja, man ska börja redan i årskurs 7, men inte för djupt…

Intervjuare: Varför ?

Elev: Om man jobbar tidigt med algebra i skolan har man god om tid att mogna.

Intervjuare: Titta på följande uppgift:

Förenkla så långt som möjligt: $\frac{2x}{x-y}-\frac{4xy}{x^2-y^2}-\frac{x}{x+y}$

Hur tänker du att gå till väga för att förenkla den ?

Elev: Först behöver jag att få fram samma nämnare.

Intervjuare: Vad menar du med detta?

Elev: Jag ska skriva $x^2 - y^2$ som en produkt .

Intervjuare: Vad använder du för regel?

Elev: Jag vet inte,…., jag blandar ihop de hela tiden…..

Intervjuare: Och sen ?

Elev. Jag ser att samma nämnare är (x – y)(x + y) ……., jag multiplicerar första bråk med (x + y) och sista med (x – y)….och sen förenklar jag det hela…

Intervjuare: När du förlänger varje bråk, vad är det viktigt att tänka på?

Elev: ……funderar….

Intervjuare: Finns det vissa villkor som nämnaren måste uppfylla ?
Elev: Kanske…, men jag kommer inte ihåg vad det kan vara.
Intervjuare: Kan du dividera ett tal med noll?
Elev: Nä,… miniräknaren visar error. JO! x ska inte vara lika med y…..
Intervjuare: Det räcker?
Elev: ……funderar…. och inte heller med –y.
…………………

Både elev 4 och 5 visar att algebra underlättar förståelsen av ett annat område men den nyttoaspekten reflekteras enbart i ökande förmåga att analysera vardagliga texter logiskt. Eleven använder ett ganska acceptabelt matematisk språk men det visar sig att eleven inte har fattat varför man måste ha definitionsvillkor när man jobbar med rationella uttryck.

<u>Elev 6</u>
……………

Intervjuare: Titta på följande uppgift:

Förenkla så långt som möjligt: $$\frac{\frac{3x}{1+x}-1}{1-\frac{3-x}{x+2}}$$

Hur tänker du att gå till väga för att förenkla den ?
Elev: Jag förlänger det givna bråket med 1+x respektive x+2, sen kan jag förenkla täljaren och nämnaren. Nu inverterar jag bråket som är i nämnaren och räknar multiplikation mellan två bråk. Efter förkortning får jag fram svaret.
Intervjuare: Behövs det att skriva vissa villkor för nämnaren?
Elev: Jag ska skriva att x kan inte vara –1 och inte heller - 2 .
…………………
Eleven visar klar tankegång och hanterar på rätt sätt det matematiska språket.

<u>Elev 7</u>

………………………
Intervjuare: Vad tycker du om algebra?
Elev: I början fanns det många ifrågasättningar t. ex.: Varför behöver man den ? Men nu, inser jag att den är oerhört viktig.
Intervjuare: Tycker du att det skulle vara möjligt att klara NV programmet utan att kunna algebra?
Elev: Nej, det är omöjligt. Den måste man kunna.
Intervjuare: Tycker du att det är viktigt att börja med algebra tidigt ?
Elev: Ja, man ska börja redan i årskurs 7 , utan att upprepa så mycket vad som har läst i 4, 5 och 6.
Intervjuare: Titta på följande uppgift:

Förenkla så långt som möjligt: $$\frac{x^2-16}{x^2-7x+12}$$

Hur tänker du att gå till väga för att förenkla den ?

Elev: Jag ser direkt att jag kan använda konjugatregel för täljare, sedan kollar jag om jag kan bryta ut någonting i nämnaren.
Intervjuare: Kan du?
Elev: Nej, och jag tänker på om det inte är en utvecklade regel…….
Intervjuare: Vad menar du med detta?
Elev: Jag löser andragradsekvationen, och sen skriver jag en produkt……
Intervjuare: Och sen ?
Elev. Förkortar jag det hela.
Intervjuare: Finns det vissa villkor som nämnaren måste uppfylla ?
Elev: Jag, den ska inte vara noll…..
…………………
Eleven visar att övning ju som bekant färdighet ger - frågan är bara vilken. Det matematiska språket är ganska korrekt men kvalitativa aspekter i redovisningen är försumbara.

Elev 8
………………
Intervjuare: Kan du formulera ett problem som syftar på följande ekvation
$$500 \cdot 1{,}09^x = 20000$$
Elev: Ja,…. (funderar)…
Det bor 500 personer i en liten by. Varje år växer befolkningen med 9%. Hur många år tar det för att befolkningen ska komma upp till 20000 ?
……………..
Ja,…Inga kommentarer!

Sammanfattning och slutsatser

Jag ska nu försöka att sammanfatta min undersökning genom att:
- låta min teori bakgrund vara synliga i mina slutsatser
- att ta hänsyn till vad det innebär att våra både läraren och undersökaren
- redovisa varje frågeställning för sig
- presentera om resultaten är tillförlitliga

Det finns en del slutsatser som kan dras från den tidigare teorigenererande forskningen. Jag hävdade därvid bl. a. att:
- individen konstruerar själv sin kunskap,
- kunskapen grundas på subjektets reflektion av sina handlingar,
- konstruktionen är en självreglerande process,
- genom en social interaktion etableras en socialt förhandlad verklighet,
- kunskap utvecklas ur den särskilda erfarenheten genom en reflektiv abstraktion

Jag har i min undersökning studerat elevernas konstruktioner av algebra i ett utvecklingsperspektiv. Jag har funnit att konstruktivismen, har kunnat fungera som en tolkningsram, när det gäller att klarlägga viss begreppsbildning, hur den utvecklas och förändras (se bilaga 1). Genom att använda mig av intervjuer och observationer i klassrummet under två år har jag kunnat följa dels rapporten, dels hur eleven språkligt hanterar olika situationer.

Jag har genomfört min undersökning genom att jämföra två typer av situationer: tänkande/kommunikation med och utan artefakter å ena sidan och jämförelser mellan vad elever säger när de får skriftliga uppgifter respektive hur de angagerar i en samtalssituation som rör samma problem å andra sidan.

Intervjun är en besvärlig och delvis förrädisk metod att använda för att kartlägga en elevs kunskaper. Det är inte alls säkert, att de svar som ges i intervjun ger en bild av det svarandens kunskaper (Novak, 1998). Sättet att fråga och själva situationen påverkar och styr det sätt på vilket man svarar. I samtalet gäller andra spelregler, även om intervjusituation som de denna också har sina speciella mönster. Här kan frågor komplettetras och förtydligas. I samtalet utvecklas kunskapen och det sker en inlärning utan att intervjuaren nödvändigtvis tillför explicit information. Samtalet etablerar i många fall en kontext för tänkande, där man stegvis kan ta sig framåt.

När eleverna ställdes inför de olika frågorna försökte de anpassa sig till situationens villkor och frågans ramar. Det finns ingen neutral grund att stå på när det gäller begreppsförståelse. För att ett begrepp ska bli kunskap hos eleven, måste den ständigt förändras och rekonstrueras (Ausubel, 1968). Varje gång en elev använder en term eller ett ord, kan vi tänka oss att dess betydelse berikas och förändras.

För att komma åt en utveckling av elevernas begreppsbildning krävs en longitudinell ansats, speciellt i en period då elevernas strukturer formas.

Min första fråga var: *"Varför finner många ungdomar det svårt att förstå sig på bokstavssymboler, även om de t ex valt NV-programmet?"*

Jag har kommit fram till att algebra är ett område, där man måste gå långsamt fram. Därför kan man börja så smått ganska tidigt, t ex i klass 6, givetvis under förutsättning att man undviker alla formler. Detta kan leda till vad Piaget kallade *mognad* hos eleven (Piaget,1964). Men eleverna behöver också exempel på algebrans kraft. De behöver få se, att användningen av bokstavssymboler kan hjälpa dem att knäcka ett problem, som de inte kan knäcka med sifferräkning. Ett betydelsefullt steg i problemlösning är att välja vissa symboler, att införa beteckningar. Matematiska symboler är nära förknippade med matematiskt tänkande. Matematisk notation verkar som ett slags språk väl anpassat för sitt ändamål, koncist och precist, med regler som i motsats till vanliga grammatiska regler inte har några undantag. Enligt forskningsrapporter från 1970 –talet visar det sig att formel logik kräver tid. Tid som inte erbjuds i nuvarande skolan.

Det finns många småsaker i skolalgebran, som en lärare har anledning att vara noga med och kontrollera att eleverna verkligen förstått. Har de inte förstått är det ju ingen "småsak". Många av dessa enkla frågor är av den art, att de ofta måste upprepas, för att kunskaperna skall befästas. Det är av stor vikt, att eleverna får vänja sig vid att uttrycka, vad de gör, och skriva ut detta. Att tala och att tänka är två processer som är nära förbundna med varandra. Användningen av ord stöder tanken.

Stoffet i matematik är hierarkiskt och kumulativt till sin natur, varför den elev som inte lärt sig förstagradsekvationer rimligtvis inte heller kan lära sig andragradsekvationer. Vidare utnyttjas en stor del av undervisningstiden till individuella övningar, vilket bl a medför att läraren i heterogena klasser får en ansträngd handledningssituation.

De flesta algebraiska begrepp är komplexa och kräver en hög abstraktionsnivå. Algebraisk kunskap konstrueras av eleven dels genom abstraktion, som reflekterar på aritmetik snarare än sinnesintryck, dels genom generalisering. Abstraktion och generalisering är två komplementära processer. Abstraktion handlar om att kunna dra det gemensamma ur en mängd olika situationer, medan generalisering är att kunna tillämpa det som är gemensamt på en mängd olika situationer. I mötet med nya situationer utvecklas nya strukturer genom förändring av de gamla. Allt eftersom elevens erfarenheter utvidgas och medvetandegörs överskrids deras gamla scheman (R. Biehler, 1994, s. 247). Jag ser dock att elever ibland vid för dem nya situationer griper tillbaka på tidigare scheman som man kunnat anta att de övergivit. Detta fenomen finns diskuterat i Piaget (1964). Eleven som t ex ställs inför en uppgift som kräver en reflekterad abstraktion, dvs formella operationer, kan gå tillbaka till en lägre nivå i sina försök att lösa uppgiften. När operationerna visar sig vara stabila kan man tala om ett stadium i struktureringen av algebraisk kunskap.

Olika elever har av olika skäl olika lätt för att acceptera vissa modeller. En del elever accepterar helt enkelt inte en "spelregel" utan kräver en konkret förankring av den. Tyvärr är nyttoaspekten (t ex vardagsmatematik) inte den främsta motiveringen att lära sig algebra. Andra elever har under sin tidigare skolgång missat någon viktig förkunskap eller skaffat sig någon ofullgången eller felaktig tankeform.

När jag jämför intervjuer av olika elever, upptäcker jag snart, att de ofta uppfattar och tolkar en algebraisk uppgift på olika sätt. Vissa elever accepterar en regel utan att reflektera över den, andra förstår regeln och kan använda den, medan ytterligare andra försöker att finna en djupare mening i regel. Tyvärr är det inte alltid så lätt att finna en mening i alla algebraiska regler, speciellt inte om man avser en praktiskt förankrad mening.

Min andra fråga var *i vilken utsträckning räknar eleverna på olika program med formler och algebraiska förenklingar?*

Undersökningens resultat visar att algebra på samhällsprogrammet av många elever uppfattas som att inte har med deras samhälleliga tillvaro att göra. Det visade sig att undervisningen i algebra skiljer sig från vad eleverna gör i de andra ämnena. Jag tror att skolan på ett pedagogiskt och tidsmässigt ekonomiskt sätt skall bibringa eleverna användbara kunskaper och färdigheter. Slutmålet bör vara kunskaper och färdigheter som kan tillämpas utanför den rena matematiken. Detta innebär inte att man nödvändigtvis hela tiden måste arbeta med tillämpade problem hämtade från andra ämnesområden. Det bör säkert göras i större utsträckning än vad som nu är fallet för att motivera och exemplifiera.

För NV -elever är situationen annorlunda. Eleverna har flera möjligheter att få en stark begreppsbildning inom algebra genom att utveckla olika konkreta begrepp som hämtas från olika ämnesområden: fysik, kemi, biologi, data programmering etc.

Min tredje fråga var *hur kan man skapa förståelse och motivation för att använda bokstavssymboler?*

Konstruktionen av algebraisk kunskap sker genom en reflektiv abstraktion (Piaget, 1964), där elevens handlingar medvetandegörs och tas som utgångspunkt för medveten reflektion. Därför bör eleverna försättas i situationer som stimulerar denna reflektion. Eleverna behöver också utvecklas i att själv medvetandegöra sin reflektion. Detta kan ske:

- genom att eleven får möta problem inom olika kontexter och aspekter av algebra
- genom att uppmärksamma olika aspekter i differentieringsprocessen, såsom mellan abstrakta och logisk – aritmetiska strukturer
- genom en social interaktion där eleverna stimuleras att jämföra de egna konstruktionerna med kollegornas

I min undersökning har jag redovisat i tabell 3 och 4 att det skapas förbättringar i elevernas inlärning av algebra genom att utmana elevens föreställningar, och stimulera dem till reflektion. För att hjälpa en elev ur hans problem är det viktigt att känna till vad eleven befinner sig kunskapsmässigt.

Det är därför betydelsefullt att eleven i undervisningen ofta ställs inför olika situationer och kognitiva konflikter. Det finns inga begrepp eller strukturer som ligger och väntar på att bli upptäckta av eleverna i en undervisning. Dessa är i stället resultatet av elevernas lärande, där kunnandet utvecklas i ett socialt sammanhang, dvs i en interaktion med andra i en viss social och kulturell kontext. Med kulturell kontext menar jag den matematiska kultur som genom lärarens undervisning kommer att etableras i klassrummet. Lärarens uppfattning av matematikens väsen kommer att forma hur man förhåller sig till undervisningen.

För att eleven ska kunna utveckla en kunskap som kan förstås och accepteras också av andra behövs en interaktion med andra, såväl lärare som kollegor. Dialogen är nödvändig för att eleven själv ska kunna strukturera och därmed utveckla sitt algebraiska kunnande. Utan ett väl intrimmat språk som är bärare av matematikens idéer både i muntlig och i skriftlig form uppstår brister i kommunikationen som kan vara svåra att genomskåda eller kompensera. Den språkliga inlärningen innebär att hela stoffet presenteras för eleven i en strukturerad sekvens.

Användningen av tekniska hjälpmedel i algebra kan ha en inspirerande effekt även på svagpresterande elever. Men den måste användas med eftertanke. Slutmålet får vara att åskådliggöra begrepp, använda ett undersökande arbetssätt, göra matematiska experiment, generalisera och kontrollera lösningar. Chandler (1992) stödjer denna bild med slutsatsen att det finns en positiv ökning av förståelse och framsteg i matematik när eleverna kan visualisera sitt arbete. Chandlers studie visar att elever som använder grafiska miniräknare för att undersöka, göra antaganden om och konstruera samband mellan numerisk, grafisk och algebraisk framställning av t ex funktioner har en bättre förståelse för relationen mellan en funktion och dess grafiska representation.

En liknande undersökning genomfördes av Ekenstam & Nilsson (1979) i vilken undersöktes elevers svårigheter i algebra. Persson, P-E. och Wennström, T., startade 1998 en undersökning med huvudsyftet att beskriva förkunskaperna i algebra hos nybörjare på NV-programmet och vilka förkunskaper som är speciellt viktiga för algebrainlärningen, och år 2000 en annan undersökning med syftet att analysera gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse. Undersökningarnas slutsatser visar samma problematik om algebrainlärning som jag har visat i min undersökning. Av detta följer att mina resultat kan vara tillförlitliga.

I det redovisade insamlade materialet redovisas inte min analys i samband med informella samtal och klassrum observationer. Det bör också noteras att utfallet av observationerna och de redovisade elevsvaren i enkäterna skall läsas med stor hänsyn till att inga korrelationer mellan valet av program och deras olika förutsättningar förekommer i min redovisning av studien. Studien begränsas också i urvalet av undersökningsgrupp. Så här i början av min undersökning kan jag inte dra några mer djupgående slutsatser. Jag hoppas att jag fortsätter med mina studier och kan få ännu bättre bild av elevernas utveckling i åk 3.

Referenser

Ausubel, D.P. (1968). *Educational psychology: A Cognitive View*. Holt, Reinhart.

Bell, A.W., Costello, J. & Küchemann, D. (1987. *Research on Learning and Teaching. A Rewiew of Research in Mathematical Education. Part A.* Windsor, Berkshire: The NFER-Nelson Publ. Comp. Ltd.

Biehler, R. et al., (1994), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chandler, P.A. (1992). *The effect of the graphing calculator on high school students mathematical achievement*. Michigan: UMI Dissertation Services. Ann Arbor.

Ekenstam, A. & Nilsson, M. (1979). A new approach to the assessment of children's mathematical competence. *Educational Studies in Mathematics 10*, 41-66

Emanuelsson, G. & Wallby, K., (2000), Hög tid för matematik, *Nämnaren nr. 4,* s.1

Gagné, R. M. (1965). *The Conditions of Learning*. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Grevholm, B. (in press). *Vi skriver y = x+5. Vad betyder det?* I C. Bergsten & B. Johansson (Red.) *Rapport från Minikonferens om matematikdidaktik i Sundsvall*, 1998.

Olteanu, C. (2000). *Varför är skolalgebra svårt?,* Rapport Högskolan Kristianstad.

Piaget, J. (1964), *Development and learning.* Journal of research in Science Teaching, nr. 2, s. 176-186.

Persson, P-E., Wennström, T. (1999), *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse,* Tsunami, nr 1, 2003 (Rapport Högskolan Kristianstad.).

Persson, P-E., Wennström, T. (2000), *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse,* Tsunami, nr 2, 2003 (Rapport Högskolan Kristianstad.).

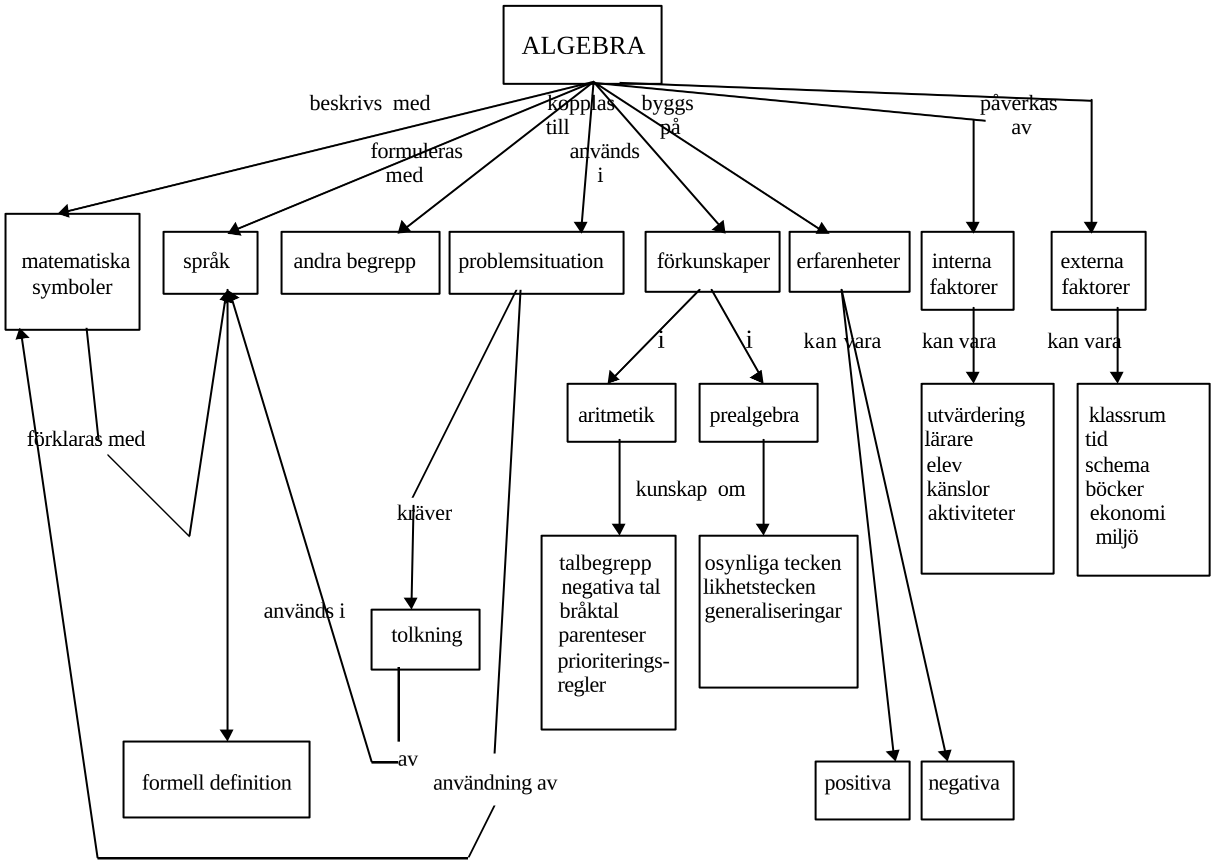
Rapport om gymnasieskolans kursprov, se
http://www.skolverket.se/nat/resultat/gykursvt00.shtml

Resnick, L. B. & Ford, W. W. (1981). *The psychology of Mathematics for Instruction.* Lawrence Erlbaum Associates, publishers. New Jersey: Hillsdale.

Romberg, T. A. (1993). How one comes to know. Models and Theories of the Learning of Mathematics. In M. Niss (ed.) *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. An ICMI Study, 97- 111. London: Kluwer Academic Publishers.

Svenning, C. (1999). *Metodboken.* Lorentz förlag. ISBN 91-972961-3-9

Bilaga 1


ALGEBRA
beskrivs med
formuleras med
kopplas till
används i
byggs på
påverkas av
matematiska symboler
språk
andra begrepp
problemsituation
förkunskaper
erfarenheter
interna faktorer
externa faktorer
i
i
kan vara
kan vara
kan vara
aritmetik
prealgebra
utvärdering
lärare
elev
känslor
aktiviteter
klassrum
tid
schema
böcker
ekonomi
miljö
förklaras med
kunskap om
kräver
talbegrepp
negativa tal
bråktal
parenteser
prioriterings-regler
osynliga tecken
likhetstecken
generaliseringar
används i
tolkning
av
användning av
formell definition
positiva
negativa

Bilaga 2

Utvärderingsuppgifter

SP- programmet

1. Förenkla så långt som möjligt: $(a + 2b)(a - 2b) - (a + 2b)^2$
2. Förenkla så långt som möjligt: $(3x + 1)^2 - (x + 5)(x - 5) - 4x(2x - 1)$
3. Lös ekvationen: $\frac{2x-4}{6} = \frac{2x+3}{3}$
4. Lös ekvationen: $(2x - 2)(x - 1) - 3(x - 1) = 0$
5. Lös ekvationen: $(x + 5)(x - 5) - 5(x - 6) - x^2 = 0$
6. Lös följande ekvationssystem: $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ 3x - y - 4 = 0 \end{cases}$
7. Förenkla så långt som möjligt: $\frac{8a^2 + 12a}{4a + 6}$
8. Förenkla så långt som möjligt: $\frac{8^{\frac{4x}{3}} \cdot 4^{2x+1}}{2^{8x}}$

NV- programmet

1. Förenkla så långt som möjligt: $\frac{8a^2 + 12a}{4a + 6}$
2. Förenkla så långt som möjligt: $\frac{x^2 - 16}{x^2 - 7x + 12}$
3. Lös ekvationen: $\frac{x+1}{x} + \frac{x+2}{2x} = \frac{x+3}{3x}$
4. Förenkla så långt som möjligt: $\frac{2x}{x-y} - \frac{4xy}{x^2 - y^2} - \frac{x}{x+y}$
5. Förenkla så långt som möjligt: $\frac{\frac{3x}{1+x} - 1}{1 - \frac{3-x}{x+2}}$
6. Lös ekvationen: $500 \cdot 1{,}09^x = 20\,000$
7. Lös ekvationen: $100 \cdot x^5 = 5\,400$
8. Lös ekvationen: $\lg(x^2 + 1) = 1$

Bilaga 3

Enkät **Matematik - Algebra**

NV/SP -programmet

Del1

1. Du har redan lärt en del algebra på C respektive A -nivå. Hur tror du att dina kunskaper var i algebra i slutet av åk 1? Förklara kortfattat.

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

2. Vilket var det svåraste att lära dig ? Varför ?

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

3. Har det skett några förändringar i ditt sätt att se på algebra ? Förklara kortfattat.

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

Del 2

4. Har genomgångarna i algebra bidragit till att Du förstår algebra bättre? Förklara kortfattat.

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

5. För att vara duktig i algebra i skolan hur viktigt tror Du det är att:

	inte viktigt	ganska viktigt	mycket viktigt
komma ihåg formler och metoder			
tänka följdriktigt och metodiskt			
förstå matematiska begrepp, principer och strategier			
kunna tänka kreativt			

6. I vilken utsträckning instämmer Du eller instämmer Du inte i vart och ett av följande påståenden ?

	instämmer inte alls	instämmer inte	instämmer	instämmer helt och hållet
jag upptäcker behovet av algebraisk notation				
jag upptäcker behovet av att uttrycka generaliseringar				
jag känner igen olika uttryck för samma mönster				
jag inser att de algebraiska symbolerna står för tal				
jag accepterar algebraiska konventioner som en naturlig konsekvens av utvecklingen av ett precist, koncist språk				

<u>Del 3</u>

7. Tycker Du att det behövs mer tid till övning på enkla sammanhang inom algebra ? Förklara kortfattat.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

8. Hur många timmar (60min) per vecka brukar Du ägna åt att räkna matematik utanför schemalagd tid ? Ringa in det svar som passar dig!

   inga   mindre än 1h   1-2 h   3-4 h   mer än 4 h

9. Vilka faktorer begränsar Ditt sätt att lära Dig algebra? Förklara kortfattat.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

<u>Del 4</u>

10. Använder du det algebraiska formelspråket i alla ämnen som utnyttjar matematik?

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

11. Vidgar detta i så fall din förståelse i de andra ämnena? Förklara kortfattat.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

12. Tycker Du att din förmåga att tänka algebraiskt har bidragit till att klara Nationella Provet i matematik? Varför?

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Exempel på uppgiftssviterna:

Uppgift 3 NV –programmet :

Lös ekvationen: $\frac{x+1}{x}+\frac{x+2}{2x}=\frac{x+3}{3x}$

$\frac{3x+4}{2x}=\frac{\text{x}+3}{3\text{x}}$

6(x + 1) + 3(x + 2) = 2(x + 3)

3(3x + 4) = 2(x + 3)

9x + 12 = 2x + 6

7x = - 6

Uppgift 3 SP –programmet :

Lös ekvationen: $\frac{2x-4}{6}=\frac{2x+3}{3}$

3(2x – 4) = 6(2x + 3)

2x – 4 = 2(2x + 3)

6x – 12 = 12x + 18

2x – 4 = 4x + 6

6x = - 30